

Inhalt.

1. W. König. Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten	1
2. Victor Hensen. Darstellung der Lamellentheorie	41
3. R. Zeigmondy. Ueber die Absorption des Lichtes in Farbgläsern	60
4. F. A. Sundell und H. J. Tallqvist. Ueber das Dargestellte elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren	72
5. L. Holborn und A. Day. Ueber den Schmelzpunkt des Goldes	89
6. L. Holborn und A. Day. Ueber die Ausdehnung einiger Metalle in hoher Temperatur	109
7. W. Jaeger. Ueber die Unregelmäßigkeiten Weston'scher Cadmiumelemente mit 14,2 proc. Amalgam in der Nähe von 0°	133
8. K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten	157
9. H. Hulshof. Ueber die Oberflächenspannung	165
10. W. Voigt. Ueber das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie	187
11. W. Voigt. Ueber das elektrische Analogon des Zeeman-Effektes	197
12. W. Voigt. Weiteres zur Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden und absorbirenden Mittel	209
13. J. Stark. Berechnung der Leitfähigkeit durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule	215
14. E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim. Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung	225
15. L. Lewin. Zur Geschichte der Telegraphie	231

Manuscripte sind an den Herausgeber, Professor Dr. F. Dreyer, zu senden. Seine Adresse ist Gießen, Nahrungsborg 5.

Es wird gefordert, die Manuscripte druckfertig einzusenden und in den Correcturen, die beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuszeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortgeschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl anzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dem ersten Blatt bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffen, den Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlich bestimmten Frist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.

ANNALEN
DER
PHYSIK.

VERLEGT VON JOHANNES AMBROSIIUS BARTH

VIERTHE FOLGE.

BAND 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

P. FOUCHÉ, M. PLANCK, S. QUINCKE,

VIERTHE FOLGE.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND VERMIDLT VON

M. PLANCK

VERLEGT VON

PAUL DEUDE.

MIT SEINER FORTSETZUNG.



LEIPZIG, 1893.

VERLAG VON JOHANNES AMBROSIIUS BARTH.

ANWENDEN DER PHYSIK.

LEHRBUCH

BAND I.

ANNALEN DER PHYSIK.

22724

HERAUSGEGEBEN UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 4.

DER GANZEN REIHE 300. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT NEUN FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1901.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

40XRB

30.50

Inhalt.

Vierte Folge. Band 4.

Erstes Heft.

	Seite
1. W. König. Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten	1
2. Victor Hensen. Darstellung der Lamellentöne	41
3. B. Zsigmondy. Ueber die Absorption des Lichtes in Farbgläsern	60
4. F. A. Sundell und Hj. Tallqvist. Ueber das Decrement elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren	72
5. L. Holborn und A. Day. Ueber den Schmelzpunkt des Goldes	99
6. L. Holborn und A. Day. Ueber die Ausdehnung einiger Metalle in hoher Temperatur	104
7. W. Jaeger. Ueber die Unregelmäßigkeiten Weston'scher Cadmiumelemente mit 14,3 proc. Amalgam in der Nähe von 0°	123
8. K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten. (Fortsetzung von p. 744. Bd. 3. 1900)	137
9. H. Hulshof. Ueber die Oberflächenspannung	165
10. W. Voigt. Ueber das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien nach der molecularen Theorie	187
11. W. Voigt. Ueber das elektrische Analogon des Zeemaneffectes	197
12. W. Voigt. Weiteres zur Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden und absorbirenden Mittel	209
13. J. Stark. Berechnung der Leitfähigkeit durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule	215
14. E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim. Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung	225
15. L. Lewin. Zur Geschichte der Telegraphie	231

Ausgegeben am 4. Januar 1901.

Zweites Heft.

	Seite
1. E. Hagenbach. Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Induction	283
2. F. Paschen. Ueber das Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers	277
3. F. Paschen. Eine neue Bestimmung der Dispersion des Flussspatites im Ultrarot	299
4. F. Paschen. Bestimmung des selectiven Reflexionsvermögens einiger Planspiegel	304
5. Egon v. Schweidler. Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgange eines elektrischen Stromes	307
6. I. Klemenčič. Ueber die Prüfung von Magnetstahlorten	316
7. R. Wachsmuth. Bestimmung der Wechselzahl eines Wechselstromes	328
8. K. Kerkhof. Ueber die Temperaturen in Geissler'schen Röhren	327
9. Heinrich Jaeger. Magnetische Spiegelbilder	345
10. Leo Grunmach. Experimentelle Bestimmung von Capillaritätsconstanten condensirter Gase	367
11. Eduard Riecke. Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft	378
12. Eduard Riecke. Ueber Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen	388
13. J. Stark. Ueber Ionisirung durchströmter Gase und die unipolare Entladung an glühenden Körpern	402
14. Edmund van Aubel. Ueber das thermoelektrische Verhalten einiger Oxyde und Metallsulfide	416
15. Edmund van Aubel. Ueber die Molecularwärmen zusammengesetzter Körper und das Gesetz Neumann-Joule-Kopp	420
16. W. Wien. Zur Theorie der Strahlung; Bemerkungen zur Kritik des Hrn. Planck	422

Ausgegeben am 1. Februar 1901.

Drittes Heft.

1. Max Wien. Ueber die Erzeugung und Messung von Sinusströmen	425
2. Max Wien. Die akustischen und elektrischen Constanten des Telephons	450
3. F. Pockels. Zur Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen	459
4. Max Hornemann. Die Wirkungen der Gleichstromschwankungen, der elektrischen Schwingungen und der Elektroinductionsströme auf eine in einem constanten Felde stehende Magnetnadel bez. einen Inductor aus weichem Eisen	481

	Seite
5. Albert Einstein. Folgerungen aus den Capillaritätserscheinungen	513
6. G. Tammann. Ueber die sogenannten flüssigen Krystalle	524
7. F. Himstedt. Ueber einige Versuche mit Becquerel- und mit Röntgenstrahlen	531
8. F. Himstedt und W. A. Nagel. Ueber die Einwirkung der Becquerel- und der Röntgenstrahlen auf das Auge	537
9. Max Planck. Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum	553
10. Max Planck. Ueber die Elementarquanta der Materie und der Elektrizität	564
11. W. Voigt. Zur Festigkeitslehre	567
12. Eduard Riecke. Ueber charakteristische Curven bei der elektrischen Entladung durch verdünnte Gase	592
13. Karl F. Lindman. Experimentaluntersuchung über die Metallreflexion der elektrischen Schwingungen	617
14. H. Dörrie. Ueber die Verteilung der Elektrizität auf dem Ellipsoid	638
15. V. Schumann. Zur Lichtdurchlässigkeit des Wasserstoffs	642
16. S. H. Burbury. Ueber die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie	646
17. E. Warburg. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Egon v. Schweidler: Ueber das Verhalten flüssiger Dielektrica beim Durchgang eines elektrischen Stromes	648

Ausgegeben am 1. März 1901.

Viertes Heft.

1. H. Rubens und F. Kurlbaum. Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes	649
2. E. Wiechert. Elektrodynamische Elementargesetze	667
3. Svante Arrhenius. Ueber die Wärmeabsorption durch Kohlensäure	690
4. Rudolf H. Weber. Ueber die Oberflächenspannung mit Oel bedeckter Wasseroberflächen und die Wirkungsweise der Molecularkräfte	706
5. K. R. Johnson. Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Inductionsapparaten. (Fortsetzung von p. 137. Bd. 4. 1901)	722
6. O. Viol. Mechanische Schwingungen isolirt gespannter Drähte mit sichtbarer elektrischer Seitenentladung	734
7. K. E. Guthe. Beiträge zur Kenntnis der Cohärerwirkung	762
8. Louis Lownda. Beiträge zur Kenntnis des thermomagnetischen Longitudinaleffectes	776

	Seite
9. G. Berndt. Ueber die Bandenspectra der Thonerde und des Stickstoffs	788
10. J. Koenigsberger. Ueber die Abhängigkeit der Absorption des Lichtes in festen Körpern von der Temperatur	796
11. T. Mizuno. Ueber den Einfluss eines selbstinductionslosen Widerstandes auf die oscillatorische Condensatorentladung	811
12. H. A. Naber. Das Luftbarometer	815
13. D. A. Goldhammer. Ueber die Spectralgleichung des blanken Platins	828
14. D. A. Goldhammer. Ueber den Druck der Lichtstrahlen	834
15. Carl Frömme. Ueber den Magnetismus des Eisens	858

Ausgegeben am 2. April 1901.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I. König, Figg. 1—11.

„ II. König.

„ III—VIII. Zsigmondy.

„ IX. Paschen.

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTER FOLGE. BAND 4

Die Doppelbrechung in transparenten uniaxialen Kristallen, von W. König.

(Dieser Teil 1. Heft 1-11 und der 12.)

Die Redaktion der „Beiblätter zu den Annalen der Physik“ wird vom 25. Bande ab (Januar 1901) Herr Professor Dr. Walter König in Greifswald übernehmen.

Ich bitte deshalb, alle Zusendungen für die Redaktion der „Beiblätter“ in Zukunft an Herrn Professor Dr. König zu richten, entweder durch meine Vermittelung oder direkt nach Greifswald, Bismarckstrasse 21.

Hochachtungsvoll

Johann Ambrosius Barth.

NEW YORK: Published by C. E. Rouse & Co., 150 Nassau St., N. Y.

London: Published by W. & A. G. & Co., 15, Abchurch Lane, E. C. 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 4.

1. *Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten; von W. König.*

(Hierzu Taf. I, Figg. 1–11 und Taf. II.)

Wenn eine längliche Glasplatte oder ein vierkantiger Glasstab transversale Schwingungen mit freien Enden und zwei oder mehr Knotenlinien ausführt, so wird in den Schwingungsbäuchen, entsprechend den periodischen Verbiegungen, die die Platte hier erfährt, eine periodische Doppelbrechung von der gleichen Art auftreten, wie sie dauernd durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgerufen werden kann. Man kann die Frage aufwerfen, ob auch an den Knotenstellen eine Beeinflussung der Lichtschwingungen durch die elastischen Schwingungen der Platte oder die damit verknüpften elastischen Verbiegungen der Platte vorhanden ist. Einige orientierende Versuche ergaben ohne Schwierigkeit, dass in den Knotenstellen in der That eine Doppelbrechung von eigentümlicher Natur auftritt. Sie erinnert in ihrer Art an die Doppelbrechung, welche Kundt in bewegten reibenden Flüssigkeiten beobachtet hat, und schien mir einer genaueren Prüfung ihrer Gesetze und ihres Ursprunges wert zu sein. Eine solche erforderte aber auch eine genaue Untersuchung der Erscheinungen im Schwingungsbauche, um beide Vorgänge quantitativ miteinander vergleichen zu können. So entstand die nachfolgende Untersuchung. Ihr experimenteller Teil ist schon vor einer Reihe von Jahren im Institut des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. ausgeführt worden; auch habe ich auf der Lübecker Naturforscherversammlung über die experimentellen Ergebnisse kurz berichtet.¹⁾ In der theoretischen Deutung der Versuche stieß ich anfangs auf eine Schwierigkeit, die

1) W. König, Verhandl. d. Gesellsch. d. Naturf. u. Aerzte, Lübeck 1895. II. Teil. 1. Hälfte. p. 54.

weitere experimentelle und theoretische Studien veranlasste und dadurch zur Folge hatte, dass sich die ausführliche Mitteilung der Untersuchung bis jetzt verzögert hat.

1. Beschreibung der Apparate.

a) *Die Glasplatte und ihre Aufstellung.* Die untersuchte Glasplatte hatte eine Länge l von 70 cm, eine Breite b von 7 cm und eine Dicke d von 7 mm. Die Beschaffung einer Platte von dieser Grösse aus gut gekühltem, völlig spannungsfreiem Glase hätte enorme Kosten verursacht. Ich habe mich daher bei diesen Versuchen, die eigentlich nur als vorläufige Versuche betrachtet wurden, mit einer Platte begnügt, die aus gutem Spiegelglas geschnitten war. Die schmalen Längsflächen waren gut polirt, um eine gute Durchsicht in Richtung der Breite b durch die Platte zu gestatten. Die Verwendung einer derartigen Platte hatte natürlich den Uebelstand, dass die Platte schon in unverbogenem Zustande eine gewisse Doppelbrechung zeigte. Stellte man sie mit ihrer Fläche senkrecht auf die lange, schmale Seitenfläche und blickte zwischen gekreuzten Nicols, deren Polarisationsrichtungen mit der Längsrichtung der Platte Winkel von 45° bildeten, senkrecht durch die Platte in Richtung ihrer Breite hindurch, so erschien sie nicht vollkommen dunkel, sondern zeigte, parallel zu ihren Flächen, helle und dunkle Streifen, entsprechend doppelbrechenden und neutralen Schichten. Der Charakter der Doppelbrechung stimmte durchaus mit den von Czapski an schnell gekühlten Glasplatten gemachten Beobachtungen¹⁾ überein; die Glasmasse verhielt sich in der Nähe der Flächen wie gepresstes, in der Mitte zwischen den Flächen wie gedehntes Glas, wobei Zug- und Druckrichtung parallel zu den Flächen zu denken sind. Diese Doppelbrechung war nicht stark. Trotz des 7 cm langen Weges, den das Licht in der Platte zu durchlaufen hatte, ging die Interferenzfarbe nicht über das Grau der ersten Ordnung hinaus; eine Glimmerplatte, die das Violett des Ueberganges von der ersten zur zweiten Ordnung zeigte, gab an den hellsten Stellen als Additionsfarbe Blau, als Subtractionsfarbe Rot; danach würde die Gangdifferenz im Maximum

1) S. Czapski, Wied. Ann. 42. p. 319—331. 1891.

nicht über $\lambda/7$ betragen haben. Immerhin bildete diese Eigenschaft der Platte ein störendes Moment, welches die Genauigkeit der Messung der durch Verbiegung hervorgerufenen Doppelbrechung bis zu einem gewissen Grade beeinträchtigte. Eine Berücksichtigung dieses Umstandes in Form einer Correction an den Messungen wäre wohl möglich, aber sehr umständlich gewesen. Bei zweckmässiger Combination verschiedener Messungen gleicht sich der Fehler einigermaassen aus.

Um die beabsichtigten Messungen der Doppelbrechung an vollkommen frei schwingenden Plattenteilen auszuführen, wurde die Platte in solcher Weise zum Schwingen erregt, dass sich vier Knotenlinien auf ihr bildeten, die Platte also ihren dritten Transversalton gab. Nach der Rechnung von Strehlke, unter Berücksichtigung der von Seebeck¹⁾ angegebenen Correction, würden diese Knotenlinien für die gegebene Platte von 700 mm Länge folgende Abstände von dem einen Ende der Platte haben: Nr. 1 66,08, Nr. 2 249,06, Nr. 3 450,94, Nr. 4 633,92. Die Beobachtung, durch Aufstreuen von Sand auf die Platte, ergab die Werte: 66,0, 247,0, 449,0, 633,0. Zur Hervorbringung dieser Schwingungsform wurde die Platte in dem ersten und vierten Knoten unterstützt und an dem einen Ende mit dem Bogen angestrichen. Die Beobachtungen wurden dann in dem einen der vollkommen freien Knoten Nr. 2 oder Nr. 3 ausgeführt. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch wurden im mittelsten Bauch, zwischen den Knoten 2 und 3, also in der Mitte der ganzen Platte beobachtet.

Wurde die Platte horizontal auf zwei Leisten gelegt, die sie in den Knoten 1 und 4 unterstützten, so bog sie sich durch ihr eigenes Gewicht ein wenig durch und zeigte eine dementsprechende Doppelbrechung, mit neutraler Mittellinie und beiderseits nach den Oberflächen hin zunehmender Stärke, von negativem Charakter auf der oberen, concaven, zusammengedrückten Hälfte, und von positivem Charakter auf der unteren, convexen, gedehnten Hälfte. Diesem Uebelstande wurde dadurch abgeholfen, dass die Platte nicht in horizontaler, sondern in verticaler Lage befestigt wurde, und zwar so, dass die langen, schmalen Seiten horizontal, die kurzen vertical standen,

1) A. Seebeck, Abhandl. d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch., Mathem.-phys. Klasse 1. p. 131—168. 1852.

das Licht also in verticaler Richtung die Platte durchsetzen musste (vgl. Fig. 2). Zu dieser Befestigung, die natürlich nur in den Knotenlinien 1 und 4 erfolgen durfte, waren besondere Vorrichtungen erforderlich, die in Fig. 1 abgebildet sind. Sie bestanden in zwei kleinen, aus starkem Holze gefügten Rahmen, von denen *A* eine Seitenansicht, *B* eine Durchsicht darstellt. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Rahmens enthielten einen breiten Schlitz, der zwei Holzleisten *a, a* als Führung diente. Zwischen diese, die sich in zwei flachen Kanten gegenüberstanden, wurde die Glasplatte *g* so weit eingeschoben, dass die Knotenlinie gerade zwischen den Kanten lag; mit Hülfe der Schraube *s* konnte dann die obere Leiste niedergedrückt und die Platte festgeklemmt werden, wobei zum

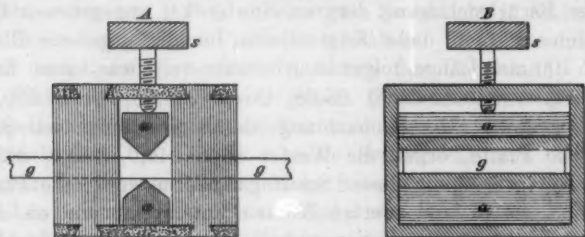


Fig. 1.

Schutze der Platte noch Lederstreifen zwischen die Holzkante und das Glas gelegt wurden. Nachdem diese Einstellung und Befestigung bei horizontaler Lage der Platte ausgeführt war, wurden die Rahmen mit der Platte auf die hohe Kante gestellt und mit Schraubzwingen auf der Unterlage befestigt. In dieser Weise konnte der Platte eine ganz feste Lage gegeben werden, ohne dass ihre Schwingungsfähigkeit dadurch beeinträchtigt worden wäre.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch, dass sich für den dritten Transversalton der Platte aus den weiter unten besprochenen photographischen Aufnahmen und der Geschwindigkeit des dabei benutzten Fallpendels (113 cm/sec) eine Schwingungszahl von 411 ganzen Schwingungen in der Secunde ergab. Eine genaue Bestimmung dieser Grösse wurde nicht ausgeführt, da sie für das Folgende nicht weiter in Betracht kam.

b) *Die subjective Beobachtungsmethode.* Die gesuchten Erscheinungen wurden zunächst direct mit dem Auge beobachtet.

Zur bequemerer Anordnung der Apparate wurde die Platte dabei in horizontaler Lage belassen. Das Licht eines Auerbrenners fiel durch ein grosses Nicol'sches Prisma senkrecht auf die lange Schmalseite der Platte, ging in Richtung der Breite durch die Platte und wurde durch den Analysator hindurch vom Auge aufgefangen. Um aber die Erscheinungen in ihrer zeitlichen Veränderlichkeit beobachten zu können, wurde durch einen verticalen Spalt, der zwischen Platte und Analysator ganz dicht vor der Platte stand, ein schmales Bündel des Lichtes ausgeblendet und in einem rotirenden Spiegel oder einfacher durch eine Linse betrachtet, die senkrecht zur Richtung des Spaltes hin und her bewegt wurde. Sehr zweckmässig erwies sich auch hierbei wieder die von mir construirte rotirende Linsenscheibe, die schon von Hrn. G. Klinkert in seiner Arbeit über die Saitenschwingungen¹⁾ beschrieben worden ist. Es war mit diesen Hilfsmitteln möglich, nicht bloss die Erscheinungen im Schwingungsbauch und im Schwingungsknoten einzeln zu analysiren, sondern auch beide wenigstens in ihrer Phasenbeziehung miteinander zu vergleichen, indem mittels geeigneter Spiegelvorrichtungen zwei Lichtbündel gleichzeitig, das eine im Bauch, das andere im Knoten durch die Platte hindurchgeschickt und dann übereinander auf denselben Spalt projicirt wurden. Eine quantitative Vergleichung aber war wegen der Flüchtigkeit der Wahrnehmungen bei dieser Methode ausgeschlossen. Zu diesem Zweck mussten die Erscheinungen photographisch festgehalten werden.

c) *Die photographische Aufnahme der Erscheinungen.* Zur dauernden Fixirung der periodischen Vorgänge wurde das Bild des Spaltes auf eine bewegte photographische Platte projicirt. Hierfür wurde das grosse Fallpendel des Instituts benutzt, das ursprünglich für die Untersuchung des Hrn. Klinkert construiert worden war und inzwischen auch von Hrn. W. Hess bei seiner Untersuchung elektrischer Schwingungen in Inductoren²⁾ benutzt worden ist. Es ist von Hrn. Klinkert genau beschrieben worden³⁾, und ich kann mich daher be-

1) G. Klinkert, Wied. Ann. 65. p. 851. 1898.

2) W. Hess, Wied. Ann. 66. p. 980—998. 1898.

3) G. Klinkert, Wied. Ann. 65. p. 850. 1898.

gnügen, zu erwähnen dass das Pendel 2 m lang ist, dass es an seinem unteren Ende eine grössere, bleibeschwerte Platte trägt, die mit einem Ausschnitt und einer Vorrichtung zum Einschieben einer Mattscheibe oder einer photographischen Cassette versehen ist, dass es seine Schwingungen in einem von allen Seiten lichtdicht abgeschlossenen Raume ausführt und in diesem Raume in abgelenkter Lage arretirt und durch eine Zugvorrichtung von aussen her im geeigneten Augenblick losgelassen werden kann. Fig. 2 stellt die ganze Versuchsanordnung in einem senkrechten Durchschnitt dar. Als Licht-

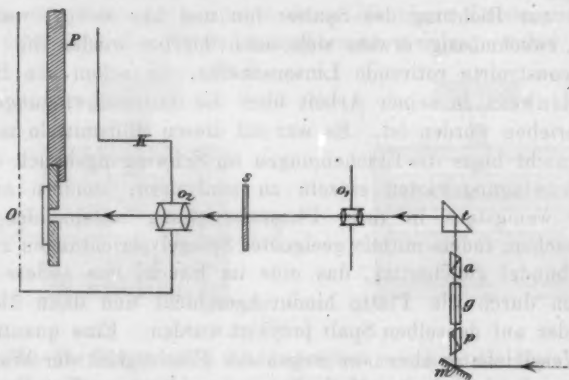


Fig. 2.

quelle wurde die Sonne benutzt. Ein Uhrwerkheliostat lenkte die Sonnenstrahlen auf den Spiegel *m*. Dieser reflectirte sie senkrecht nach oben; sie durchsetzten den Polarisator *p*, die senkrecht stehende Glasplatte *g* in Richtung ihrer Breite und den Analysator *a* und wurden dann von dem total reflectirenden Prisma *t* wieder in horizontale Richtung übergeführt. Das photographische Objectiv *O*₁ entwarf von der oberen Fläche der Glasplatte ein deutliches Bild auf der Blende *s*; diese trug einen senkrechten Spalt, der aus dem Bilde der Glasfläche senkrecht zu deren Längserstreckung eine feine Linie herauschnitt. Diese Lichtlinie endlich wurde von dem Objectiv *O*₂ auf die photographische Platte projicirt oder richtiger auf diejenige Stelle, welche die am unteren Teil des Fall-

pendels P angebrachte photographische Platte bei der Schwingung des Pendels passirte. K ist der untere, kastenartige Teil des Dunkelraumes, der in seiner vorderen Wand das Objectiv O_2 trägt; O ist eine durch einen überfallenden Sack lichtdicht verschliessbare Oeffnung in der hinteren Wand des Dunkelraumes, die zur Bedienung des Pendels bestimmt ist.

Die Hauptschwierigkeit lag in der richtigen Führung des Lichtes, nicht bloss um die erforderliche Helligkeit, sondern vor allem um die grösste Deutlichkeit der Interferenzerscheinungen in dem Bilde der Glasfläche am Ort des Spaltes s zu erreichen. Die Bedingung hierfür ist offenbar die, dass die Lichtstrahlen die Glasplatte als ein Parallelstrahlenbündel parallel zu den beiden Plattenoberflächen durchsetzen. Die mangelhafte Beschaffenheit der Glasplatte erschwerte die Erfüllung dieser Bedingung. Es erwies sich als vorteilhaft, die Sonnenstrahlen nicht direct auf den Polarisator und die Platte fallen zu lassen, sondern sie vorher durch eine grosse, schwache Convexlinse zu concentriren und ihnen dann mittels einer starken Concavlinse, die unmittelbar vor dem Spiegel m stand, den erforderlichen Grad von Parallelität wieder zu verleihen. Durch Verschiebung dieser in Fig. 2 nicht mit gezeichneten Linsen konnte die Lichtführung so geregelt werden, dass im Bilde der Glasfläche auf dem Spalt s der Querschnitt der Platte gleichmässig erhellt erschien und die Interferenzstreifen bei Verbiegung der Platte zwischen gekreuzten Nicols in voller Schärfe hervortraten.

Indem man die Glasplatte in ihrer eigenen Ebene verschob, konnte man nach Belieben die Erscheinungen im Schwingungsbauch oder im Schwingungsknoten aufnehmen. Schwieriger war das Problem, beide Erscheinungen gleichzeitig, unmittelbar übereinander auf den Spalt s zu projectiren, um ihre Phasen- und Grössenbeziehung ausmessen zu können. In diesem Falle wurde die Platte so verschoben, dass die Verticalebene der ganzen Aufstellung die Platte genau in der Mitte zwischen Bauch und Knoten schnitt. Das einfallende Lichtbündel wurde durch Spiegel in zwei Teile geteilt und auf getrennten Wegen weiter geleitet, der eine Teil durch den Knoten, der andere durch den Bauch; jedes der beiden Bündel passirte unter und über der Glasplatte seinen eigenen Polarisator und Analysator.

Ueber den Analysatoren befanden sich total reflectirende Prismen, welche die beiden Lichtbündel wieder auf horizontale Richtung brachten, sie aber senkrecht zur Verticalebene der Aufstellung aufeinander zu reflectirten. In der Mitte zwischen diesen Prismen befanden sich zwei weitere total reflectirende Prismen, mit gekreuzten Hypotenusenflächen unmittelbar nebeneinander liegend und so angeordnet, dass jedes von ihnen eines der beiden Strahlenbündel wieder senkrecht nach oben reflectirte. Hier wurden dann endlich beide Bündel von einem fünften, total reflectirenden Prisma aufgefangen, das sie wieder in horizontale Richtung überführte und auf das Objectiv O_1 warf. Bei richtiger Einstellung der fünf Prismen entstanden dann auf dem Spalt s zwei unmittelbar übereinander gelegene Bilder der Glasfläche, von denen das eine vom Schwingungsbauch, das andere vom Schwingungsknoten herrührte. Die gleichmässige, richtige Erhellung der beiden Bilder hatte aber in diesem Falle grosse Schwierigkeiten.

Nachdem die richtige Einstellung des ganzen optischen Apparates erreicht war, wurden die Aufnahmen in folgender Weise ausgeführt: Bei geschlossenem Objectiv O_2 wurde die Cassette in den Rahmen am Fallpendel eingeschoben, das Fallpendel in die Auslösungsvorrichtung eingehakt und die Cassette dann geöffnet. Darauf wurde das Objectiv O_2 geöffnet; ein Gehülfe strich die Glasplatte mit dem Bogen an und zugleich wurde das Pendel ausgelöst. Unmittelbar darauf wurde das Objectiv O_2 wieder verdeckt, damit beim Rückschwingen des Pendels das Licht die photographische Platte nicht ein zweites Mal traf. Eine Auswahl der auf diesem Wege erzielten Aufnahmen ist auf Taf. I vereinigt.

Bevor ich auf die Discussion der Versuchsergebnisse eingehe, wird es nützlich sein, die wichtigsten Formeln über den Schwingungszustand der Glasplatte, von denen ich im Folgenden Gebrauch zu machen habe, zusammenzustellen.

2. Theorie der Transversalschwingungen der Platte.

Die Längsrichtung der Platte werde als x -Axe, die Richtung ihrer Dicke als y -Axe angenommen. Macht man die Voraussetzung, dass die Dicke klein ist gegen die Länge, und beschränkt man sich auf kleine Deformationen, so kann man

die eintretenden Verschiebungen in erster Annäherung als rein transversal, d. h. nur in Richtung der y -Axe erfolgend, und daher für alle Punkte desselben Querschnittes der Platte als gleich betrachten. Die Bewegungsgleichung der Platte lässt sich dann in der Form ansetzen:¹⁾

$$(1) \quad \mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial x},$$

wenn unter μ die Dichte des Glases, unter P die im Querschnitt wirkende tangentielle Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, verstanden wird. Mit den Verbiegungen der Platte steht diese Kraft im Zusammenhang durch die Beziehung:

$$(2) \quad P = \frac{E \cdot d^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3},$$

wobei d die Dicke, E den Elasticitätscoefficienten des Glases bedeutet. Unter Benutzung dieser Gleichung geht die Bewegungsgleichung der Platte über in die Form:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{E \cdot d^3}{12 \cdot \mu} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Wenn der Stab einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n giebt, so lässt sich seine Bewegung darstellen durch die Gleichung:

$$(4) \quad y = u \cdot \sin 2 \pi n t,$$

worin die Amplitude u eine Function von x ist und der Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^3} \cdot u$$

zu genügen hat. Um die Lösung in einfacherer Form schreiben zu können, setze ich mit Kirchhoff²⁾ den Factor:

$$(6) \quad \frac{(2 \pi n)^2 \cdot 12 \cdot \mu}{E \cdot d^3} = \left(\frac{p}{l}\right)^4.$$

Dann lautet das allgemeine Integral der Gleichung (5):

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= A \cos \frac{p x}{l} + B \sin \frac{p x}{l} \\ &+ C \frac{e^{\frac{p x}{l}} + e^{-\frac{p x}{l}}}{2} + D \frac{e^{\frac{p x}{l}} - e^{-\frac{p x}{l}}}{2}. \end{aligned} \right.$$

1) J. Violle, Lehrbuch der Physik, deutsche Ausgabe 2. (1) p. 199.

2) G. Kirchhoff, Mechanik, 4. Aufl. p. 440. 1897.

Die Grenzbedingungen, dass beide Enden der Platte $x=0$ und $x=l$ frei schwingende Enden sein sollen, ergeben folgende Gleichungen:

$$C = A, \quad D = B,$$

$$A \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p \right) + B \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p \right) = 0,$$

$$A \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p \right) + B \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p \right) = 0.$$

Daraus folgt für p die Gleichung:

$$(8) \quad \cos p \cdot \frac{e^p + e^{-p}}{2} = 1$$

oder

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \mp \operatorname{tg} p,$$

wobei das obere oder das untere Zeichen abwechselnd für die aufeinander folgenden Wurzeln p_1, p_2, p_3, p_4 etc. der Gleichung zu nehmen ist. Diese Wurzeln haben die Werte

$$p_1 = 3,011 \frac{\pi}{2}, \quad p_2 = 5,000 \frac{\pi}{2}, \quad p_3 = 7,000 \frac{\pi}{2}, \quad p_4 = 9,000 \frac{\pi}{2}$$

und entsprechen Schwingungen der Platte mit 2, 3, 4, 5 Knoten. Uns interessiert im vorliegenden Falle ausschliesslich die Wurzel

$$p_3 = 7 \frac{\pi}{2}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen für p lässt sich das Verhältnis A/B auf eine einfache Form bringen. Denn es ist:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= - \frac{\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p}{\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p}, \\ &= - \frac{\frac{1}{\cos p} - \cos p}{\mp \operatorname{tg} p + \sin p}, \\ &= - \frac{\sin p}{\mp 1 + \cos p}; \\ (9) \quad \frac{A}{B} &= \begin{cases} + \operatorname{ctg} \frac{p}{2} & \text{für } p_1, p_3, \dots \\ - \operatorname{tg} \frac{p}{2} & \text{für } p_2, p_4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Daraus folgt, unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte der Wurzeln p_1, p_2 etc., dass für alle Töne des Stabes sehr angenähert die Bedingung erfüllt ist:

$$B = -A.$$

Dann hat die Amplitude den angenäherten Wert:

$$(10) \quad u = A \left\{ \cos \frac{px}{l} - \sin \frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}} \right\}$$

und demgemäss haben die Verrückungen selbst und ihre Ableitungen die Näherungswerte:

$$(11) \quad y = A \left\{ \cos \frac{px}{l} - \sin \frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi nt,$$

$$(12) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -A \frac{p}{l} \left\{ \cos \frac{px}{l} + \sin \frac{px}{l} + e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi nt,$$

$$(13) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A \frac{p^2}{l^2} \left\{ \cos \frac{px}{l} - \sin \frac{px}{l} - e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi nt,$$

$$(14) \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = A \frac{p^3}{l^3} \left\{ \cos \frac{px}{l} + \sin \frac{px}{l} - e^{-\frac{px}{l}} \right\} \sin 2\pi nt.$$

Für die nachfolgenden Anwendungen interessieren uns ausschliesslich die Vorgänge im mittleren Schwingungsbauch und im nächstgelegenen Schwingungsknoten für den Fall des dritten Tones, d. h. für $p = 7\pi/2$.

a) Für die Mitte der Platte ist $x = l/2$, folglich ganz allgemein für alle Werte von p :

$$u = A \left[\cos \frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}}}{2} \right] + B \left[\sin \frac{p}{2} + \frac{e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}}}{2} \right].$$

Aus Gleichung (3) lassen sich leicht die Beziehungen herleiten:

$$e^{\frac{p}{2}} + e^{-\frac{p}{2}} = \pm \frac{2 \cos \frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \begin{cases} + \text{ für } p_3, p_4, p_7, p_8 \dots \\ - \text{ für } p_1, p_2, p_5, p_6 \dots \end{cases}$$

$$e^{\frac{p}{2}} - e^{-\frac{p}{2}} = \pm \frac{2 \sin \frac{p}{2}}{\sqrt{\cos p}} \begin{cases} + \text{ für } p_1, p_4, p_5, p_8 \dots \\ - \text{ für } p_2, p_3, p_6, p_7 \dots \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke ein, und berücksichtigt die Gleichung (9), so erhält man

$$\text{für } p_2, p_4, p_6, p_8 \dots u = 0,$$

d. h. in der Mitte einen Knoten,

für $p_1, p_3, p_5, p_7 \dots$

$$u = \frac{A}{\cos \frac{p}{2}} [1 \mp \sqrt{\cos p}] \quad \begin{cases} - \text{ für } p_1, p_3 \dots \\ + \text{ für } p_5, p_7 \dots \end{cases}$$

Für den dritten Ton der Platte wäre also der genaue Wert von u für die Mitte:

$$(15) \quad u_0 = \frac{A}{\cos \frac{p_3}{2}} [1 + \sqrt{\cos p_3}].$$

Da die Wurzeln der Gleichung (8) sehr nahe gleich den ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ sind, so ist $\cos p$ sehr nahe $= 0$, $\cos p/2$ sehr nahe $= \pm \frac{1}{2}$. Bezeichnet man die Amplitude für den Mittelpunkt der Platte mit a , so ist die Bewegung des mittleren Querschnittes gegeben durch:

$$(16) \quad y = a \cdot \sin 2\pi n t$$

und a in erster Annäherung bestimmt durch die Gleichung:

$$(17) \quad a = A \cdot \sqrt{2}.$$

Für die im Schwingungsbauche auftretende Doppelbrechung ist die Krümmung der Platte maassgebend. Der reciproke Wert des Krümmungsradius $1/\rho$ ist gleich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \sin 2\pi n t.$$

Berechnet man $d^2 u/dx^2$ in derselben Weise wie oben u aus dem vollständigen Ausdrucke für u , setzt $x = l/2$ und berücksichtigt dieselben Beziehungen, wie bei der Berechnung von u , so erhält man für $p = p_3$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= - \frac{A}{\cos \frac{p_3}{2}} \frac{p_3^2}{p^2} (1 - \sqrt{\cos p_3}), \\ &= - u_0 \frac{p_3^2}{p^2} \frac{1 - \sqrt{\cos p_3}}{1 + \sqrt{\cos p_3}}, \\ &= - u_0 \frac{p_3^2}{p^2} (1 - 2\sqrt{\cos p_3}). \end{aligned}$$

wenn man die höheren Potenzen von $\sqrt{\cos p}$ vernachlässigt. Lässt man das ganze Correctionsglied fort, wie bei den nachfolgenden Anwendungen erlaubt ist, so hat man die einfache Beziehung:

$$(18) \quad \frac{1}{q} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -a \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2 \cdot \sin 2\pi n t.$$

Man erhält die Formeln (16) und (18) auch unmittelbar aus den Formeln (11) und (13), wenn man in diesen

$$x = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad p = 7 \frac{\pi}{2}$$

setzt, und den letzten Summanden $e^{-p/2}$ als kleine Grösse vernachlässigt.

b) Die Lage der Schwingungsknoten ist bestimmt durch die Bedingung $u = 0$. Von Interesse für das Folgende ist die Grösse der tangentialen Kraft im Knoten, die durch Gleichung (2) als Function von $\partial^2 y / \partial x^2$ definirt war. Die vollständige Durchrechnung des Ausdruckes $d^2 u / dx^2$ führt in diesem Falle, wegen der complicirteren Bedingung für den Wert von x , auf keine in dem Grössenverhältnis ihrer Glieder leicht zu überblickende Endformel. Wir begnügen uns daher von vornherein mit dem den Formeln (11) bis (14) zu Grunde liegenden Grade der Annäherung. Die Bedingung $y = 0$ ergibt aus (11) die Gleichung:

$$e^{-\frac{px}{l}} = \sin \frac{px}{l} - \cos \frac{px}{l},$$

und dies in Gleichung (14) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2 A \frac{p^2}{l} \cos \frac{px}{l} \cdot \sin 2\pi n t.$$

Setzt man für p den Wert $7\pi/2$ ein, so ist für die beiden mittleren Knoten nach den Rechnungen von Strehlke und Seebeck

$$\frac{px}{l} = 1,2453 \pi \quad \text{bez.} \quad = 2,2547 \pi,$$

$\cos px/l$ also sehr nahe gleich $\mp \sqrt{\frac{1}{2}}$. Daraus folgt:

$$(19) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2 \sin 2\pi n t.$$

Nach Feststellung dieser Grössenbeziehungen gehe ich dazu über, die durch die Schwingungen der Platte hervorgerufene Doppelbrechung an der Hand der photographischen Aufnahmen zu besprechen.

3. Die Erscheinungen im Schwingungsbauch.

a) *Allgemeiner Charakter der Erscheinung.* Die im Schwingungsbauch auftretende Doppelbrechung ist von derselben Art, wie sie durch eine statische Durchbiegung der Platte hervorgerufen werden kann. Von der unverändert bleibenden Mitte der Platte aus gerechnet wird das Glas auf der concaven Seite der gebogenen Platte zusammengedrückt, auf der convexen gedehnt. Zug- und Druckrichtung fallen in die Längserstreckung der Platte. Die Hauptaxen der entstehenden Doppelbrechung liegen daher parallel und senkrecht zur Plattenoberfläche, und die Nicol'schen Prismen müssen mit ihren Polarisationssebenen unter 45° zur Längsrichtung der Platte eingestellt werden, um die Interferenzen in ihrer grössten Deutlichkeit hervortreten zu lassen.

Die Stärke der Doppelbrechung wächst von der neutralen Mittellinie an nach den Oberflächen der Platten zu, und ist dem Abstand von der Mittellinie proportional. Im parallelen Lichte beobachtet man daher eine von der dunklen Mittellinie aus nach beiden Seiten stetig wachsende Phasendifferenz. Die Linien gleicher Phasendifferenz sind, wenigstens in der Nähe des Schwingungsbauches, Linien, die der neutralen Mittellinie parallel laufen. Ihr Abstand von der Mittellinie wird um so kleiner, je stärker die Platte gekrümmt wird. Schwingt der mittlere Querschnitt der Platte nach dem Gesetz der Gleichung (16), so ist die Doppelbrechung in ihm gleich Null in den Augenblicken, in denen die Platte durch ihre Ruhelage geht; mit wachsender Elongation nähern sich die Linien gleicher Phasendifferenz der Mittellinie, erreichen ihren kleinsten Abstand im Augenblick der grössten Ausweichung, und entfernen sich dann wieder; sie schwingen also während einer halben Schwingung der Platte einmal hin und zurück.

Diese Schwingungen der isochromatischen Curven sind in der im Abschnitte 1 beschriebenen Weise zeitlich analysirt

und photographisch aufgenommen. Figg. 1—4 der Taf. I geben diese Aufnahmen für vier verschieden starke Schwingungszustände der Platte wieder. Die Amplitude a der Plattenschwingungen ist an den Aufnahmen unmittelbar aus den Sinuslinien zu entnehmen, welche die beiden Plattenränder gezeichnet haben. Dieselbe Sinuscurve beschreibt natürlich auch die neutrale Mittellinie, wie namentlich an den Aufnahmen mit grosser Amplitude ersichtlich ist. Die neutrale Mittellinie wird in gleichmässigen Abständen von senkrecht zu ihr verlaufenden dunklen Linien gekreuzt. Diese treffen die Plattenränder genau in der Mitte zwischen Berg und Thal der Sinuscurven; sie entsprechen denjenigen Augenblicken, in denen die Platte durch die Ruhelage ging und ohne Doppelbrechung war. Innerhalb jeder der so gebildeten Abteilungen sieht man die Punkte gleicher Phasendifferenz, indem sie an die neutrale Zone heran und wieder fortschwingen, eine eigentümliche Curve beschreiben. Die dunklen Curven in den Figuren entsprechen den Gangdifferenzen λ , 2λ , 3λ , die Mitten der hellen Zwischenräume zwischen ihnen den Gangdifferenzen $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$. Dabei ist unter λ die mittlere Wellenlänge des photographisch wirksamen Lichtes verstanden; sie ist in einer früheren Arbeit zu 0,000428 mm ermittelt worden.¹⁾ Es soll nun zunächst das Gesetz dieser eigentümlichen, isochromatischen Curven entwickelt werden.

b) *Die Gleichung der isochromatischen Curven.* Wir können die Stärke der Doppelbrechung der Grösse der elastischen Deformation proportional setzen. Es sei s die Länge eines Elementes der Platte in Richtung ihrer Längserstreckung; durch Verbiegung der Platte geht s über in $s + \delta s$. Dann können wir die Phasendifferenz Δ ansetzen in der Form:

$$(20) \quad \Delta = C \cdot \frac{\delta s}{s},$$

eine Gleichung, die auch dem Vorzeichen nach richtig sein soll, indem wir die bei einer Verlängerung auftretende Doppelbrechung als positiv, die bei einer Verkürzung auftretende als negativ bezeichnen. Bedeutet η den Abstand des be-

1) W. König, Wied. Ann. 69. p. 1—11. 1899.

treffenden Elementes von der neutralen Mittellinie, in der das Element bei der Verbiegung seine Länge s unverändert beibehalten würde, und bezeichnet ϱ den Krümmungsradius der Mittellinie, so besteht die Beziehung:

$$\frac{s + \delta s}{s} = \frac{\varrho - \eta}{\varrho}$$

oder

$$(21) \quad \frac{\delta s}{s} = - \frac{\eta}{\varrho},$$

wobei der Krümmungsradius negativ zu rechnen ist, wenn er auf Seite der negativen y -Werte liegt. Für die Phasendifferenz folgt dann:

$$\Delta = - C \frac{\eta}{\varrho},$$

und unter Benutzung von (18)

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta = C a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2 \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \\ \quad = D \cdot \eta \cdot \sin 2\pi n t, \end{cases}$$

wenn man

$$D = C \cdot a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2$$

setzt. Der Abstand der Punkte gleicher Phasendifferenz von der Mittellinie variirt also nach dem Gesetze:

$$\eta = \frac{\Delta}{D \cdot \sin 2\pi n t}.$$

Für die aufgenommenen Curven sind die Abscissen der Zeit proportional; unter passender Wahl des Maassstabes kann man setzen

$$x = 2\pi n t.$$

Die Ordinaten der Curven aber sind nicht einfach $= \eta$; es ist vielmehr zu berücksichtigen, dass die Mittellinie selber eine auf- und abschwingende Bewegung nach Gleichung (16) ausführt. Daher sind die Ordinaten der Curve

$$y = \eta + a \cdot \sin 2\pi n t,$$

und die vollständige Gleichung der isochromatischen Curven ist:

$$(23) \quad y = \frac{\Delta}{D \cdot \sin x} + a \cdot \sin x.$$

Dabei ist a die Amplitude der Plattenschwingung, D eine von a abhängige Grösse; beides also sind für eine gegebene Plattenschwingung Constante. Δ ist für jede Curve eine bestimmte Constante. Indem man diesem Parameter alle möglichen positiven oder negativen Werte erteilt, erhält man die ganze Schaar der isochromatischen Curven. Für die Mitte der dunklen Curven auf den Aufnahmen hat Δ ganzzahlige Werte, für die Mitte der hellen ist Δ gleich ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$; $\Delta = 0$ ergibt die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten, dem Fehlen aller Doppelbrechung entsprechenden Geraden $x = 0, \pi, 2\pi$ etc.

Diese Geraden sind zugleich die Asymptoten für sämtliche isochromatischen Curven; denn für $x = 0, \pi, 2\pi$ etc. wird $y = \infty$ für alle endlichen Werte von Δ . Sie teilen das ganze Gebiet in lauter gleiche Abteilungen. Für ein bestimmtes Δ wechselt das Vorzeichen von y von einer Abteilung zur nächsten. Die isochromatischen Curven bestehen daher aus lauter getrennten Aesten, die innerhalb jeder Abteilung asymptotisch zu den beiden Grenzlinien verlaufen und abwechselnd über und unter der Nulllinie liegen, mit symmetrischem Verlauf zu dieser.

Um ein besseres Bild von der Beschaffenheit dieser Curven zu geben, habe ich von einer der Aufnahmen nach dem Originalnegative ein etwa 20 mal vergrössertes Diapositiv hergestellt, das in Taf. II wiedergegeben ist. Leider ist die Reproduction nicht in der wünschenswerten Deutlichkeit ausgefallen, wie auch die Lichtdruckbilder der Taf. I die grosse Schärfe der Originalaufnahmen nur unvollkommen wiedergeben. Für diese vergrösserten Curven wurden die Constanten der Formel durch folgende Messungen festgelegt.

1. Die Breite jeder Abteilung von $x = 0$ bis $x = \pi$ beträgt 25,5 mm.

2. Die Ordinatendifferenz zwischen Berg und Thal der vom Rande der Glasplatte beschriebenen Sinnescurve, also die doppelte Amplitude der Schwingung, $2a$, beträgt 6,5 mm.

3. Der kleinste Abstand der Curven $\Delta = +1$ und $\Delta = -1$ voneinander, d. h. die Grösse $2/D$, beträgt 37 mm.

Folglich ist die Gleichung der Curven:

$$y = \frac{18,5 \cdot \Delta}{\sin 7,059 x} + 3,25 \sin 7,059 x,$$

wobei x und y in mm zu messen sind und das Argument des \sin in Graden ausgedrückt ist. Nach dieser Gleichung sind die Curven für $\Delta = 0, \pm \frac{1}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 2, 2\frac{1}{4}$ und 3 berechnet und auf Millimeterpapier eingezeichnet worden. Diese Zeichnung ist dann in richtiger Lage auf das Diapositiv gelegt und mit diesem zugleich abcopirt worden. Man sieht auf der Taf. II die hellen feinen Linien der Zeichnung auf den helleren oder dunkleren Partien der photographischen Aufnahme verlaufen und überzeugt sich leicht, dass Form und Lage der isochromatischen Curven durch die obige Gleichung im wesentlichen richtig dargestellt wird. Wenn in einigen Fällen die berechneten Curven nicht genau in der Mitte der hellen und dunklen Curven der Aufnahme verlaufen, so kann diese Abweichung durch die im ersten Abschnitt besprochene Doppelbrechung, welche die Platte schon im natürlichen Zustande aufweist, bedingt sein. Ausserdem ist die richtige Uebereinanderlagerung bei der Lichtdruck-Wiedergabe nicht vollkommen gelungen.

c) *Das Vorzeichen der Doppelbrechung.* Schwingt die Platte nach oben im Sinne der Bilder, so ist die Doppelbrechung in der oberen Hälfte positiv, in der unteren negativ, umgekehrt wenn sie nach unten schwingt. Benachbarte Abteilungen haben daher, ebenso wie die beiden Hälften einer jeden Abteilung, entgegengesetztes Vorzeichen der Doppelbrechung. Man kann dieses Verhalten dadurch sichtbar machen, dass man eine Viertelundulations-Glimmerplatte zwischen Glasplatte und Analysator einschaltet in solcher Lage, dass ihre Hauptaxen mit den Hauptaxen der Doppelbrechung in der Glasplatte zusammenfallen. Die Fig. 5 und 6 auf Taf. I sind in dieser Weise gewonnen, und zwar hat bei Aufnahme 5 die Glimmerplatte so gelegen, dass sich ihre Wirkung auf die Phasendifferenz zu der der negativen Doppelbrechung addirte, von der der positiven subtrahirte; bei Aufnahme 6 war die Glimmerplatte um 90° gedreht und ihre Wirkung subtrahirte sich für die negative und addirte sich für die positive Doppelbrechung. Die Gleichung der isochromatischen Curven für diese beiden Fälle lässt sich aus Gleichung (23) dadurch herleiten, dass man für Δ einführt $\Delta \pm \frac{1}{4}$, wobei das Pluszeichen für Aufnahme 5, das Minuszeichen für Aufnahme 6 gelten würde. Die beiden Aufnahmen sind gewissermaassen zu einander complementär,

indem die Gangdifferenzen in ihnen für gleiche Punkte sich um eine halbe Wellenlänge unterscheiden; hell und dunkel ist daher in Aufnahme 5 gegen Aufnahme 6 vertauscht. Für die neutrale Mittellinie und die zu ihr senkrechten Linien $x = 0$, π , 2π etc. würde in beiden Aufnahmen die Gangdifferenz $\frac{1}{2}$ betragen, also eine mittlere Helligkeit für diese Stelle bedingen. Gleichwohl erscheinen diese Stellen in Aufnahme 5 ziemlich dunkel — die Curven $\Delta = 0$ sind noch durch dunklere Stellen miteinander verbunden — während sie in Aufnahme 6 fast von gleicher Helligkeit wie die hellen Maxima erscheinen. Diese Abweichung hat offenbar ihren Grund in der ursprünglichen Doppelbrechung der Platte, die, wie ich im 1. Abschnitt erwähnt habe, in der Mitte der Platte positiv ist. Die Gangdifferenz ist daher in der Nähe der neutralen Mittellinie bei Aufnahme 5 nicht $\lambda/4$, sondern etwas kleiner, und bei Aufnahme 6 nicht $\lambda/4$, sondern etwas grösser.

d) *Der Betrag der spezifischen Doppelbrechung.* Aus den Aufnahmen lässt sich endlich das Verhältnis der Phasendifferenz zur elastischen Deformation, d. h. die Constante C der Formel (20), ermitteln. Allein die Phasendifferenz ist nur ein relatives Maass der Doppelbrechung. Sie ist ausserdem abhängig von dem Verhältnis der Dicke der durchstrahlten Schicht zur Wellenlänge. Um auf Zahlen zu kommen, die für das benutzte Glas unabhängig von seinen Dimensionen gelten, führe ich als Maass der Doppelbrechung die durch die Verbiegung erzeugte Differenz der Brechungsexponenten der beiden Strahlen im Glase ein:

$$\nu = n_1 - n_2.$$

Dann ist

$$\Delta = \frac{\nu b}{\lambda} = C \frac{\delta s}{s}$$

und folglich

$$(24) \quad \nu = \frac{C \lambda}{b} \cdot \frac{\delta s}{s} = G \cdot \frac{\delta s}{s}.$$

Die hier neu eingeführte Grösse G ist das Verhältnis der Doppelbrechung zur Deformation oder das „Maass der spezifischen Doppelbrechung“ für den hier vorliegenden Fall einer Dehnung oder Zusammendrückung in einer Richtung. Sie ist eine charakteristische Constante des Glases, vorausgesetzt, dass

strenge Proportionalität zwischen der Doppelbrechung und der Deformation besteht. Ich berechne G aus der maximalen Doppelbrechung, die im Schwingungsbauche bei der grössten Ausweichung der Platte stattfindet. Für diese ist nach (22):

$$\Delta = G \cdot \frac{b}{\lambda} \cdot a \cdot \left(\frac{7\pi}{2l} \right)^2 \cdot \eta.$$

also:

$$(25) \quad G = \frac{4 \lambda^3}{49 \cdot \pi^2 b} \cdot \frac{\Delta}{a \eta}.$$

Der die Veränderlichen eines jeden Versuches enthaltende Factor $\Delta/a\eta$ ist aus einer Reihe verschiedener Aufnahmen in der Weise abgeleitet worden, dass an den Originalnegativen mit Hilfe eines Quincke'schen Kathetometermikroskopes mit Ocularmikrometer folgende Grössen gemessen wurden: 1. die Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Sinuscurven des Plattenrandes, also die doppelte Amplitude $2a$ und 2 , der kürzeste Abstand 2η zweier Curven derselben Abtheilung von entgegengesetzt gleicher Phasendifferenz, und zwar für $\Delta = \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Die nachfolgende Tabelle enthält die gemessenen Werte von $2a$ und 2η in Teilen der Ocularscala und die daraus berechneten Werte von $\Delta/a\eta$. Sie hat den Zweck zu zeigen, bis zu welchem Grade sich $\Delta/a\eta$ als Constante aus diesen Messungen ergibt. Wenn man von der letzten

Tabelle 1.

Ausmessung der Interferenzen im Schwingungsbauch.

$2a$	2η			$\Delta/a\eta$		
	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 1$	$\Delta = 2$	$\Delta = 3$
3,5	17,5	35,5	53,0	0,0658	0,0644	0,0647
3,5	16,0	32,5	—	714	703	—
3,4	17,5	35,0	—	672	672	—
3,2	17,5	35,5	—	714	704	—
3,1	19,0	39,0	—	679	662	—
3,0	21,0	42,5	—	635	628	—
3,0	20,0	40,5	—	667	658	—
2,25	27,5	56,0	—	647	635	—
2,2	27,5	55,0	—	661	661	—
2,0	33,0	—	—	606	—	—

Zahl absieht, die offenbar zu klein ausgefallen ist, gruppieren sich die Zahlen unregelmässig um den Mittelwert 0,0663. Dass die Schwankungen beträchtlich sind, rührt wesentlich von der Unsicherheit der Messung der kleinen Grösse $2a$ her; der Plattenrand erscheint in der Vergrösserung des Mikroskopes nicht hinreichend scharf, um eine ganz exacte Messung der Schwingungsamplitude zu gestatten. Leider ist für diese Zahlen eine Umrechnung auf Millimetermaass nicht möglich, weil ich es seinerzeit verabsäumt hatte, das Grössenverhältnis zwischen dem Bild auf der Platte und dem Object durch besondere Messungen für diese Aufnahmen festzustellen. Derartige Messungen liegen aber für andere Aufnahmen vor, die unter etwas anderen Verhältnissen angestellt waren, sodass der für sie gefundene Reductionsfactor auf die obigen Aufnahmen nicht übertragen werden konnte. Ich komme auf diese Aufnahmen, die im besonderen zum Zweck quantitativer Vergleichen der Vorgänge im Bauch und im Knoten gemacht wurden, und von denen einige in Fig. 10 und 11 der Taf. I wiedergegeben sind, weiter unten ausführlicher zu sprechen. Hier will ich nur die Zahlen angeben, die sich für die Grössen a und η aus den Interferenzcurven des Schwingungsbauches ergeben haben. Ich drücke sie in diesem Falle gleich in mm aus. Aufnahme 10 ergiebt mit ihrer sehr kleinen Amplitude sehr unsichere Werte. Aus Aufnahme 11 ergiebt sich im Mittel aus drei Messungen:

$$a = 0,13 \text{ mm}, \eta = 1,14 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a\eta} = 6,75.$$

Zwei andere Aufnahmen, die auf der Tafel nicht wiedergegeben sind, ergeben:

$$a = 0,18 \text{ mm}, \eta = 0,95 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a\eta} = 5,85$$

$$a = 0,23 \text{ mm}, \eta = 0,62 \text{ mm} \text{ für } \Delta = 1, \text{ also } \frac{\Delta}{a\eta} = 7,01.$$

Im Mittel folgt daraus für $\Delta/a\eta$: 6,53. Der constante Factor in Formel (25) ergiebt sich mit $\lambda = 0,000428$, $l = 700$, $b = 70 \text{ mm}$ zu 0,0248, und danach

$$G = 0,162.$$

Ich vergleiche schliesslich dieses Ergebnis mit dem Resultat von Messungen, die an derselben Platte bei statischer Durchbiegung angestellt wurden.

e) *Bestimmung von G auf statischem Wege.* Die Platte wurde in der Weise verbogen, dass sie in der Nähe ihrer Enden unterstützt, in der Mitte belastet wurde. Um dabei die Grösse der Durchbiegung unabhängig von einem Nachgeben der Auflager bestimmen zu können, wurde der Kunstgriff benutzt, den schon F. Neumann bei seinen Messungen über die Doppelbrechung in gebogenen Glasplatten benutzt hat.¹⁾ Es wurde eine zweite Glasplatte von genau gleichen Dimensionen beschafft; beide wurden, in der Nähe ihrer Enden durch Messingstäbe getrennt, übereinander gelegt und nun in der Mitte zusammengepresst, indem bei wagerechter Lage die untere Platte in der Mitte unterstützt, die obere in der Mitte mit Hilfe eines übergelegten Stabes mit angehängten Gewichten belastet wurde. Bei dieser Anordnung biegen sich beide Platten durch die angehängten Gewichte in gleichem Maasse durch. Die mit dem Kathetometermikroskop gemessene Verminderung ihres Abstandes war gleich der doppelten Durchbiegung jeder einzelnen Platte. Bei einem Abstand l' der Auflager von 568,5 mm ergaben sich im Mittel aus 4 verschiedenen Messungsreihen für die Abstandsänderung der beiden Platten folgende Werte:

für 1	2	3 kg Belastung
0,47	0,99	1,47 mm

also im Mittel für je ein Kilo Belastung 0,488 mm. Die Durchbiegung jeder einzelnen Platte oder die Senkung α ihrer Mitte gegen die Lage im unbelasteten Zustande würde demnach für jedes Kilo Belastung 0,244 mm betragen.

Um die Interferenzen für genau die gleichen Wellenlängen zu erhalten, wie oben bei den Schwingungsversuchen, wurde die Doppelbrechung auch bei diesen statischen Versuchen nicht direct beobachtet, sondern photographisch aufgenommen, und zwar sowohl bei gekreuzten, wie bei parallelen Nicols für die Belastungen 0, 1, 2 und 3 kg. An den Platten wurden

1) F. Neumann, Abhandlungen d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1841. II. Teil. p. 45.

wieder mit einem Kathetometermikroskop folgende Grössen ausgemessen: 1. die Abstände der isochromatischen Linien von der Mittellinie für $\Delta = \pm 1, 2, 3$ und 2. die Abstände der Platten voneinander. Ich gebe in der Tab. 2 die aus diesen Messungen gewonnenen Mittelwerte, und zwar bedeutet η (η_0 bis η_3 für die Belastungen 0—3 kg) den Abstand des Interferenzstreifens ($\Delta = 1$) von der neutralen Mittellinie, und a (a_1, a_2, a_3) die durch die Belastung hervorgebrachte Durchbiegung der Platten, beide Grössen in Scalenteilen des Ocularmikrometers ausgedrückt. Für die Berechnung ist aber zu berücksichtigen, dass die Grössen a_1 bis a_3 nicht die vollständigen Durchbiegungen der Platten angeben, da die Platten schon bei der Belastung Null infolge der gewählten Versuchsanordnung eine gewisse Durchbiegung erfahren. Bezeichnet man diese mit α_0 , so sind die wahren Durchbiegungen der Platten bei den Belastungen 1, 2 und 3 kg

$$\alpha_1 = \alpha_0 + a_1, \quad \alpha_2 = \alpha_0 + a_2, \quad \alpha_3 = \alpha_0 + a_3.$$

Die Platten zeigen daher auch schon bei der Belastung Null eine gewisse Doppelbrechung und geben einen messbaren Wert η_0 für η . Wenn man berücksichtigt, dass $\eta \propto \alpha$ constant sein muss, so lässt sich α_0 aus den Beobachtungen berechnen, indem man die Gleichungen ansetzt:

$$\eta_0 \alpha_0 = \eta_1 (\alpha_0 + a_1) = \eta_2 (\alpha_0 + a_2) = \eta_3 (\alpha_0 + a_3).$$

Den aus diesen Beziehungen im Mittel sich ergebenden Wert von α_0 und die daraus berechneten Beträge der wahren Durchbiegungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ enthält die vierte Columnne der Tabelle; die fünfte giebt die Producte $\eta \times \alpha$, um zu zeigen, wie weit dieselben constant sind.

Tabelle 2.

Ausmessung der Interferenzen bei statischer Biegung.

Belastung	η	a	α	$\alpha \cdot \eta$
0 kg	7,20 sc.	— sc.	1,71 sc.	12,31
1	4,76	0,88	2,59	12,33
2	3,54	1,75	3,46	12,25
3	2,90	2,54	4,25	12,32

Um auf Millimeter umzurechnen, berücksichtigt man, dass die mittlere Durchbiegung für je 1 kg Belastung 0,862 Sct. beträgt. Für diese Grösse hatte die directe Beobachtung 0,244 mm bei einem Werte von $l = 568,5$ mm ergeben. Bei den Versuchen über die Doppelbrechung war l' etwas kleiner, 566,5 mm, demgemäss würden 0,862 Sct. gleich 0,242 mm sein, oder 1 Sct. gleich 0,280 mm. Multiplicirt man den Mittelwert von $\alpha \times \eta$ (12,30) mit dem Quadrat dieses Reductionsfactors, so erhält man in Millimetermaass $\alpha \times \eta = 0,969$.

Um daraus G zu berechnen, muss der Krümmungsradius der Platte aus der Gleichung ermittelt werden, welche die Gestalt des durchgebogenen Stabes bestimmt. Liegt der Stab auf den beiden Lagern im Abstände l' auf und wird in der Mitte mit dem Gewicht P belastet, so ist seine Gestalt durch die Gleichung gegeben:

$$y = - \frac{P}{8 \cdot E \cdot b \cdot d^3} \{ \pm 8x^3 - l'^3 - 3l'(4x^2 - l'^2) \},$$

wobei der Nullpunkt der Abscissen in der Mitte des Stabes liegt und das obere Zeichen im ersten Klammergliede für die positiven, das untere für die negativen Abscissen gültig ist. Für die Mitte ergibt sich daraus die Senkung:

$$\alpha = - \frac{P l'^3}{4 E b d^3}.$$

und der Krümmungsradius

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3 P l'}{E b d^3} = \frac{12 \alpha}{l'^3}.$$

Daraus folgt

$$(26) \quad G = \frac{\lambda \cdot l'^3}{12 \cdot b} \cdot \frac{A}{\alpha \cdot \eta},$$

worin λ wieder = 0,000428, $l' = 566,5$, $b = 70$ mm zu setzen ist. Dann giebt der obige Wert von $\alpha \cdot \eta$

$$G = 0,169.$$

Eine andere Beobachtungsreihe, bei der die Interferenzen sowohl in der oberen, als in der unteren Platte ausgemessen wurden, ergab für die obere Platte $G = 0,174$, für die untere $G = 0,170$. Die sehr nahe Uebereinstimmung dieser drei Werte dürfte wohl auf einem Zufall beruhen; denn die Einzelwerte der Messungen zeigen relativ grosse Schwankungen, besonders

in den kleinen Werten der Durchbiegung. Der kleinen Abweichung, welche die aus den Schwingungsbeobachtungen abgeleitete Zahl für G , 0,162, von den hier gefundenen Werten — im Mittel 0,170 — zeigt, dürfte daher eine bestimmte Bedeutung nicht beizulegen sein. Vielmehr glaube ich aus der nahen Uebereinstimmung der Zahlen den Schluss ziehen zu dürfen, dass die bei den Schwingungen im Bauche auftretende Doppelbrechung sich auch quantitativ aus der jeweiligen Verbiegung der Platte vollständig erklären lässt.

Der gefundene Wert von G steht übrigens in guter Uebereinstimmung mit den Werten, die von anderen Beobachtern für Glas gefunden worden sind. Die Doppelbrechung des Glases ist seit den ersten Beobachtungen, die Brewster¹⁾ darüber angestellt hat, mehrfach gemessen worden, so von F. Neumann in der schon genannten Arbeit, von Wertheim²⁾, Mach³⁾ und Pockels.⁴⁾ Die von mir im Obigen eingeführte Grösse G entspricht dabei folgenden Grössen in der Bezeichnungsweise der verschiedenen Autoren:

$$\text{bei F. Neumann und Mach } G = \frac{5}{4} \frac{p-q}{G^2},$$

$$\text{bei Wertheim } G = \frac{E}{C},$$

$$\text{bei Pockels } G = n(1+\nu) \frac{p-q}{\omega^2}.$$

Berechnet man hiernach die Grösse G aus den Angaben der verschiedenen Autoren, so findet man folgende Werte:

$$\text{bei Brewster (nach der Berechnung von F. Neumann⁵⁾) } G = 0,168$$

$$\text{bei F. Neumann } G = 0,157$$

$$\text{bei Wertheim für gewöhnliches Kronglas } G = 0,179$$

(bei anderen Glassorten liegen die Werte zwischen 0,1633 und 0,2182)

$$\text{bei Mach } G = 0,168$$

$$\text{bei Pockels } G = 0,174.$$

1) D. Brewster, Phil. Trans. Jahrgang 1816 (1. Teil) p. 156—178; Edinb. Trans. 8. p. 369. 1818.

2) W. Wertheim, Ann. chim. phys. (3) 40. p. 156—221. 1854.

3) E. Mach, Optisch-akustische Versuche. p. 16. Prag 1873.

4) F. Pockels, Wied. Ann. 37. p. 390—391. 1889.

5) F. Neumann, l. c. p. 49.

Danach liegt also G für gewöhnliches Glas zwischen 0,16 und 0,18 und zwischen diese Grenzen fallen auch die von mir gefundenen Werte.

4. Die Erscheinungen im Schwingungsknoten.

a) *Allgemeiner Charakter der Erscheinung.* Im freien Schwingungsknoten der Glasplatte tritt zwischen gekreuzten Nicols eine einfache Aufhellung ein, die sich ziemlich gleichmässig über die ganze Dicke der Platte zu erstrecken scheint. Sie ist am grössten, wenn die Schwingungsrichtungen der Nicols senkrecht und parallel zur Längserstreckung der Glasplatte liegen. Während also im Schwingungsbauche die Doppelbrechung von der neutralen Mitte aus nach den Rändern hin zunimmt und ihre Axen in die Längsrichtung der Platte und senkrecht zu ihr fallen, ist im Knoten die Doppelbrechung sehr nahe constant in der Dickenerstreckung der Platte und ihre Axen bilden mit der Längsrichtung der Platte Winkel von 45° . Die Grösse der Doppelbrechung ist gering; die Aufhellung geht auch bei den stärksten Schwingungen nicht über das Weiss der ersten Ordnung hinaus. Zerlegt man daher die Erscheinungen mit der Linsenscheibe, oder photographirt sie mit dem Fallpendel, wobei natürlich die Nicols auf die Lage der grössten Aufhellung eingestellt werden, so erhält man eine einfache Folge von hellen und dunklen Streifen (Fig. 7 der Taf. I). Die Abstände der Mitten der hellen oder der dunklen Streifen voneinander sind genau gleich der Breite der einzelnen Abteilungen der Bauchbilder; sie entsprechen also einer halben Schwingungsdauer der Platte, oder während einer ganzen Schwingung der Platte tritt zweimal Aufhellung und Wiederverdunkelung ein.

In zwei benachbarten Perioden dieser Erscheinung hat die Doppelbrechung entgegengesetzten Charakter. Man erkennt dies am besten, wenn man zwischen die Glasplatte und den Analysator noch einen Gypskeil einschiebt, der so geschnitten ist, dass seine Kante mit den Schwingungsrichtungen des Lichtes in der Gypsplatte Winkel von 45° bildet. Legt man einen solchen Gypskeil auf die Glasplatte im Knoten derart, dass die Interferenzstreifen des Keiles der Längsrichtung der Platte parallel laufen, so fallen die Axen der Doppelbrechung

im Gyps mit denen in der Glasplatte zusammen und es tritt je nach dem Vorzeichen der Doppelbrechung in der Glasplatte Addition oder Subtraction der Wirkung, also Verschiebung der Interferenzstreifen nach der einen oder der anderen Richtung ein. Bei der Aufnahme dieser Erscheinungen mit dem Fallpendel projectirt sich das Bild der Interferenzstreifen im Gypskeil zugleich mit dem Bilde der Glasplatte auf den Spalt *s* (Fig. 2) und zwar so, dass die Streifen senkrecht zum Spalt verlaufen. Macht man eine Aufnahme, ohne dass die Platte schwingt, so erhält man das Bild des ruhenden, unverschobenen Streifens (Fig. 8 auf Taf. I). Bei schwingender Platte aber verwandelt sich der geradlinige Streifen in eine Wellenlinie (Fig. 9 auf Taf. I), deren Periode der ganzen Periode der Plattenschwingung entspricht, indem der Streifen bei der einen Aufhellungsperiode nach oben, bei der nächsten nach unten verschoben wird.

Aufnahmen dieser Art geben zugleich ein Mittel an die Hand, um die Stärke der maximalen Doppelbrechung im Knoten zu messen. Die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens — die halbe Ordinatendifferenz von Berg und Thal der Curve — giebt die maximale Verschiebung des Streifens aus seiner Ruhelage. Misst man ausserdem auf den Aufnahmen den Abstand zweier benachbarter Streifen des Gypskeiles, deren Phasendifferenz eine ganze Schwingungsdauer beträgt, so bedeutet das Verhältniss beider Grössen die von der Glasplatte bewirkte maximale Phasendifferenz in Bruchtheilen der Schwingungsdauer des Lichtes. Doch haben diese Messungen kein Interesse, wenn nicht zugleich die Amplitude der Plattenschwingung oder die gleichzeitige Stärke der Doppelbrechung im Schwingungsbauche festgestellt werden kann. Es war daher nötig, gleichzeitige Aufnahmen der Vorgänge im Bauch und im Knoten auszuführen. Die Anordnung dieser Versuche ist bereits auf p. 7 u. 8 beschrieben. Zwei Beispiele derartiger Aufnahmen enthält Taf. I unter Figg. 10 u. 11. Bevor ich jedoch auf die quantitative Vergleichung der beiden Arten von Doppelbrechung eingehe, empfiehlt es sich, die Beziehungen festzustellen, die in Bezug auf die Phasen und die Vorzeichen zwischen ihnen bestehen.

b) *Die Phase der Periode.* Die Doppelaufnahmen lassen ohne weiteres erkennen, dass die Maxima der Doppelbrechung

in den Knoten gleichzeitig mit denen in den Bäuchen eintreten. Die Doppelbrechung in den Knoten ist gleich Null in denjenigen Zeitpunkten, in denen auch die Doppelbrechung in den Bäuchen gleich Null ist, d. h. in denjenigen Zeitpunkten, in denen die Platte durch ihre Ruhelage hindurchgeht und ihre Deformation gleich Null ist. Die Doppelbrechung in den Knoten hat also nichts mit der Bewegung der Platte als solcher zu thun —, ein Gedanke, auf den vielleicht der Vergleich mit der gleichartigen Doppelbrechung in reibenden Flüssigkeiten führen könnte — sondern sie ist wie diejenige in den Bäuchen bedingt durch die in jedem Augenblicke vorhandene Deformation der Platte. Diese Deformation ist in den Bäuchen eine Biegung mit Dehnung und Zusammendrückung, wie sie oben genauer formulirt worden ist; in den Knoten ist die Deformation eine Scheerung. Die scheerende Kraft steht senkrecht auf der Längserstreckung der Platten und ist in erster Annäherung die gleiche für den ganzen Querschnitt. Bei einer solchen Deformation liegen die Axen der grössten Dehnung und der grössten Zusammendrückung unter 45° zur Richtung der scheerenden Kraft. Mit diesem Charakter der elastischen Deformation stimmt der Charakter der Doppelbrechung nach den obigen Darlegungen durchaus überein. Es erübrigt, diese Uebereinstimmung auch für das Vorzeichen der Doppelbrechung nachzuweisen.

c) *Das Vorzeichen der Doppelbrechung.* Ich habe die Doppelbrechung im Schwingungsbauche als positiv bezeichnet für die gedehnten, als negativ für die zusammengedrückten Teile des Glases. Die neutrale Mittellinie trennt das Gebiet der positiven von dem der negativen Doppelbrechung. Geht man vom Schwingungsbauche nach dem Knoten zu, so nimmt die Stärke der Doppelbrechung auf beiden Seiten der Mittellinie ab, wird im Knoten Null und wechselt bei weiterem Fortschreiten über den Knoten hinaus ihr Vorzeichen. Die Umgebung des Knotens wird also durch die Knotenlinie und die neutrale Mittellinie in vier Quadranten geteilt, von denen je zwei benachbarte entgegengesetztes Vorzeichen der durch Biegung der Platte entstehenden Doppelbrechung haben (vgl. Fig. 4). Für die scheerende Deformation im Knoten fällt dann, wie ohne weiteres ersichtlich ist, die Richtung der

grössten Dehnung in die positiven, die der grössten Zusammen-
drückung in die negativen Quadranten. Mit diesen Richtungen
fallen die Axen der Doppelbrechung zusammen, und zwar hat
im Glase derjenige Strahl die grössere Fortpflanzungsgeschwin-
digkeit, der in der Richtung der grössten Dehnung polarisirt
ist, dessen Schwingungen also senkrecht zu dieser Richtung
sich vollziehen. Die Polarisationsrichtung dieses Strahles will
ich als die „positive Axe der Doppelbrechung“ bezeichnen.
Im Schwingungsbauche fällt diese positive Axe im gedehnten
Theile in die Längsrichtung der Platte, im zusammengedrückten
Theile steht sie senkrecht dazu. Für den Schwingungsknoten
ist der Charakter der Doppelbrechung dann immer durch die
einfache Regel bestimmt, dass die positive Axe der Doppel-
brechung die positiven Quadranten halbirt.

Die Richtigkeit dieser Feststellung liesse sich an den
Doppelaufnahmen prüfen; doch würde dieses Verfahren bei
den complicirten räumlichen Beziehungen sehr unübersichtlich
sein. Ich ziehe es vor, einige Erscheinungen zu beschreiben,
die in der Nähe des Knotens auftreten, und deren Erklärung
sich aus der obigen Feststellung über den Charakter der
Doppelbrechung ohne Schwierigkeit gewinnen lässt. Man nimmt
sie wahr, wenn man die schwingende Platte in der Knoten-
gegend zwischen gekreuzten Nicols direct, ohne Spalt und
Linsenscheibe, untersucht, sodass man nicht bloss die Knoten-
linie selbst, sondern auch die benachbarten Theile der Platte
zu überblicken vermag. Stehen die Nicols mit ihren Schwin-
gungsebenen parallel und senkrecht zur Längsrichtung der
Platte, so tritt während der Schwingung nur eine gleichmässige
Aufhellung ein, die im Knoten am stärksten ist und nach den
Bäuchen zu allmählich abnimmt. Stehen die Nicolebenen
unter 45° zur Längsrichtung der Platte, so bleiben Knoten-
und Mittellinie dunkel, die vier Quadranten aber hellen sich
auf, und die Stärke der Aufhellung wächst mit der Entfernung
vom Knoten und von der Mittellinie. Dreht man die Nicols
aus dieser 45° -Stellung heraus in eine mittlere Stellung, so
treten beide Aufhellungen gleichzeitig ein; die dunkle Mittel-
linie aber theilt sich in zwei getrennte und nach entgegen-
gesetzten Seiten gebogene Aeste, die, je nachdem das Nicol-
system nach rechts oder nach links herumgedreht ist, die in

Fig. 3a oder in Fig. 3b skizzierte Lage haben. Der Vorgang erklärt sich aus dem Zusammenwirken der beiden verschiedenen Arten von Doppelbrechung, die einerseits aus der Scheerungs-, andererseits aus der Biegungsdeformation der Platte hervorgehen. Ich will mir eine genauere Erörterung dieser Erscheinungen für eine spätere Gelegenheit vorbehalten und mich an dieser Stelle damit begnügen, das Resultat des Zusammen-

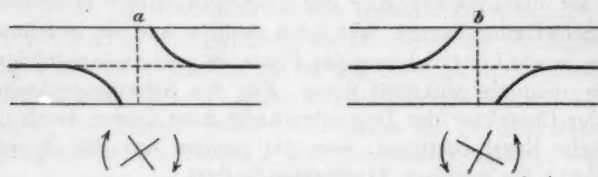


Fig. 3.

wirkens der beiden elastischen Deformationen durch eine Skizze zu erläutern, um an dieser die Entstehung der in Fig. 3 dargestellten Erscheinung und ihren Zusammenhang mit dem Vorzeichen der Doppelbrechung demonstrieren zu können.

Die kurzen Striche in Fig. 4 bedeuten die Richtung der positiven Axe der Doppelbrechung; die gestrichelten Linien

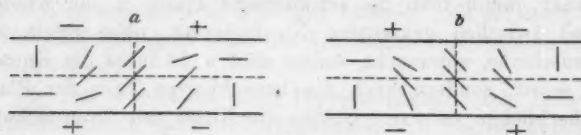


Fig. 4.

stellen die Knotenlinie einerseits, die neutrale Mittellinie andererseits dar. Es sind die beiden entgegengesetzten Fälle gezeichnet, dass die aus der Biegung hervorgehende Doppelbrechung, vom Knoten aus gerechnet, einmal im rechten oberen und linken unteren, das andere Mal im linken oberen und rechten unteren Quadranten positives Vorzeichen hat. Die Richtung der positiven Axe im Knoten ist den obigen Ueberlegungen gemäss jedesmal parallel zur Halbirungslinie der positiven Quadranten eingezeichnet. Die Figuren veranschaulichen, in welcher Weise die Richtung der positiven Axe sich aus der dem einen Schwingungsbauche zukommenden Lage

beim Durchgang durch den Knoten in die um 90° verschiedene Lage im anderen Schwingungsbauche allmählich herumdreht. Denkt man sich nun das Nicolsystem aus der 45° -Stellung heraus nach rechts gedreht, so lehrt die Betrachtung der Figuren unmittelbar, dass in den beiden gezeichneten Fällen Auslöschung an bestimmten Stellen des rechten oberen und des linken unteren Quadranten eintreten muss; umgekehrt bei Drehung nach links. Diesen Folgerungen aus den Zeichnungen entsprechen die in Fig. 3 dargestellten Thatsachen. Sie können also als Beweis für die Richtigkeit der Behauptungen angesehen werden, die ich oben hinsichtlich des Vorzeichens der Doppelbrechung im Knoten aufgestellt habe.

Ich füge in Bezug auf die beschriebenen Erscheinungen noch die folgenden Bemerkungen hinzu: Aus der obigen Darlegung folgt, dass für die beiden gezeichneten Fälle die Curven bei derselben Nicolstellung die gleiche Lage haben. Sie ändern also die Lage nicht, während die Platte aus einer Verbiegung in die entgegengesetzte hinüberschwingt, und sind daher auch während der Schwingung deutlich sichtbar. Die Form der Curven aber, wie sie in Fig. 3 dargestellt ist, entspricht nicht ganz den Beobachtungen. Die Curven machten zwar den Eindruck von Hyperbeln, doch war die Knotenlinie augenscheinlich nicht die eine Asymptote. Auch machten sich Verzerrungen der Curven bemerklich, indem in diesem Bereich geringer künstlicher Doppelbrechung die ursprüngliche Doppelbrechung der Glasplatte stärkere Störungen verursachte. Der in Fig. 3 gezeichnete Fall würde verwirklicht sein, wenn die Platte vollkommen homogen und die durch Scheerung hervorgerufene Doppelbrechung durch die ganze Plattendicke constant wäre. Wie weit die Abweichungen durch die Nichterfüllung dieser letzteren Bedingung oder durch die Inhomogenität der Platte verursacht sind, soll hier nicht weiter untersucht werden. Ich werde später auf diesen Punkt zurückkommen.

d) *Die Grösse der Doppelbrechung.* Die Doppelaufnahmen wurden mit dem Kathetometermikroskop ausgemessen und zwar wurden folgende Grössen festgestellt: 1. an dem Knotenbilde die Amplitude der Wellencurve des Interferenzstreifens und der Abstand zweier Interferenzstreifen voneinander — das Verhältnis beider Zahlen giebt die Phasendifferenz Δ , im

Knoten —; 2. an dem Bauchbilde die Amplitude a der Platten-schwingung und der kürzeste Abstand η einer Curve von bestimmter Phasendifferenz Δ_b von der Mittellinie. Ferner wurden auf Glas geritzte Millimeterscalen am Ort des Knotens und am Ort des Bauches auf die Glasplatte gelegt und die Grösse ihres Bildes auf der Mattscheibe des Fallpendels mit demselben Mikroskop ausgemessen. Diese Messung ergab unmittelbar den Factor, mit dem die Ausmessungen an den Negativplatten zu multipliciren waren, um sie auf die wirkliche Grösse des Objectes in Millimetern zu reduciren. Die beiden am besten gelungenen Aufnahmen ergaben auf diese Weise folgende Zahlen:

$$\text{für } a = 0,18 \text{ mm, } \Delta_k = 0,26, \quad \Delta_k/a = 1,444,$$

$$\text{für } a = 0,23 \text{ mm, } \Delta_k = 0,33, \quad \Delta_k/a = 1,435.$$

Die Phasendifferenz ist also der Amplitude der Schwingung proportional und wird, wenn die letztere in Millimetern gemessen wird, durch die Formel

$$\Delta_k = 1,44 \times a$$

ausgedrückt. Anstatt das Verhältniss von Δ_k zur Amplitude a zu bilden, kann man das Verhältniss zur Doppelbrechung im Bauche bilden, die ja ebenfalls mit a proportional ist. Die Resultate der Messung von Δ_b , a und η habe ich oben bereits angeführt (vgl. p. 21). Danach ist:

$$\Delta_b = 6,53 \times a \times \eta,$$

folglich:

$$(27) \quad \frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{0,22}{\eta}.$$

Es bleibt nun schliesslich die Frage zu erörtern, ob sich diese empirisch gefundene Grössenbeziehung zwischen den beiden optischen Erscheinungen aus der Grössenbeziehung der elastischen Vorgänge im Knoten und im Bauch ausreichend erklären lässt.

5. Theorie der optischen Erscheinungen.

Die beiden an der schwingenden Glasplatte beobachteten Doppelbrechungen sind nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar, weil sie von zwei ganz verschiedenen elastischen Deformationen herrühren. Um die Beziehungen zu entwickeln,

bediene ich mich der von F. Neumann aufgestellten Gleichungen.¹⁾ Es seien α, β, γ drei zu einander senkrechte „relative Dilatationen“; v_x, v_y, v_z seien die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes für Strahlen, deren Schwingungen sich im deformirten Körper parallel zu α, β, γ vollziehen, die also mit ihrer Fortpflanzungsrichtung und ihrer Polarisationsrichtung senkrecht zu den genannten Richtungen liegen. Endlich sei v die Geschwindigkeit des Lichtes im nicht deformirten Glase. Dann kann man ganz allgemein ansetzen:

$$v_x = v + q \cdot \alpha + p \beta + p \gamma,$$

$$v_y = v + p \cdot \alpha + q \beta + p \gamma,$$

$$v_z = v + p \cdot \alpha + p \beta + q \gamma.$$

Ich denke mir im Folgenden die x -Axe stets in die Richtung der grössten Dehnung gelegt; die z -Axe in die Richtung des durchfallenden Lichtes. Dann ist die beobachtete Phasendifferenz bestimmt durch die Differenz der beiden Geschwindigkeiten v_x und v_y nach der Formel:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{b}{\lambda} (n_x - n_y) \\ &= \frac{b \cdot v_0}{\lambda} \frac{v_y - v_x}{v_y \cdot v_x}, \end{aligned}$$

in der v_0 die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume bedeutet. Im Product des Nenners kann bei kleinen Deformationen der Unterschied der Grössen v_x und v_y von v vernachlässigt werden. Setzt man dann noch den Brechungsexponenten des Glases $v_0/v = N$, so ist:

$$\Delta = \frac{b N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) (\alpha - \beta).$$

Im Knoten hat die Deformation den Charakter einer Schiebung. Die Richtungen der grössten Dehnung und Zusammendrückung liegen unter 45° zur Richtung der scheerenden Kraft; die Zusammendrückung hat dieselbe Grösse wie die Dehnung, und in der dritten Richtung ist die Deformation gleich Null, also $\beta = -\alpha, \gamma = 0$:

$$\Delta_k = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) \cdot 2 \alpha_k,$$

wenn α_k die Dehnung im Knoten bedeutet.

1) F. Neumann, l. c.

Im Bauche hat die Deformation den Charakter einer Dehnung (oder Zusammendrückung) in einer Richtung und einer Contraction (oder Dilatation) in allen dazu senkrechten Richtungen. Das Verhältniß der Quercontraction zur Längsdilatation werde mit μ bezeichnet. Dann ist zu setzen:

$$\beta = \gamma = -\mu \alpha,$$

also

$$\Delta_b = \frac{b \cdot N^2}{\lambda \cdot v_0} (p - q) (1 + \mu) \alpha_b.$$

Streng genommen wäre noch zu berücksichtigen, dass bei der Dehnung der Platte die durchstrahlte Dicke b sich verkürzt um $\mu \alpha b$; doch ist das davon herrührende Correctionsglied von der zweiten Ordnung der Kleinheit und deshalb zu vernachlässigen.

Danach ist also:

$$\frac{\Delta_b}{b} = \frac{2}{1 + \mu} \cdot \frac{\alpha_b}{\alpha_k}.$$

Es handelt sich jetzt also darum, das Verhältniß der Dehnungen α_k und α_b im Knoten und im Bauch aus den Gesetzen für die elastische Verbiegung der Platte bei der Schwingung zu bestimmen. Die Grösse α_b ist unmittelbar aus der Krümmung der Platte zu berechnen:

$$\alpha_b = \frac{\eta}{\rho} = \eta \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Nicht so einfach ist die Frage nach der Grösse von α_k . Die elastische Deformation im Knoten besteht in einer Schiebung des Querschnittes in der Schwingungsebene der Platte. Ist σ_k die Grösse dieser Schiebung, so ist nach bekannten Sätzen der Elasticitätslehre die unter 45° zur Richtung der Schiebung liegende grösste Dehnung halb so gross wie die Schiebung, also:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \sigma_k.$$

Es bleibt also die Frage zu beantworten, wie σ_k zu berechnen ist. Würden sich die Querschnitte parallel mit sich selbst verschieben, um δy für zwei Querschnitte, die um δx entfernt sind, so wäre

$$\sigma_k = \frac{\delta y}{\delta x}.$$

Mit dieser Annahme würde man für die Constante der Formel (27) 51 statt 0,22 erhalten, also einen ganz falschen

Wert. Die Querschnitte verschieben sich eben nicht parallel mit sich selbst, sondern neigen sich gegeneinander in dem Maasse, als sich die Axe des Stabes krümmt; die Schiebungen der Querschnitte gegeneinander aber sind bedingt durch die Aenderungen der Krümmung und sind diesen nach Gleichung (2) proportional. Ist P die durch diese Gleichung definirte tangentiale Kraft, n der Starrheitscoefficient des Glases, so ist:

$$\sigma_k = \frac{P}{n},$$

folglich:

$$\alpha_k = \frac{E}{2n} \frac{d^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Zwischen dem Elasticitätsmodul E und dem Starrheitscoefficienten n besteht aber die Beziehung:

$$n = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_k = (1+\mu) \frac{d^3}{12} \cdot \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

und

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{d^3}{6 \cdot \eta} \times \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (18) und (19) ergibt sich daraus für die schwingende Platte:

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{p \cdot d^3}{6 \cdot l} \times \frac{1}{\eta} = \frac{7 \pi d^3}{12 l} \times \frac{1}{\eta}$$

und wenn man die Dimensionen der Platte einsetzt:

$$\frac{A_k}{A_b} = 0,128 \times \frac{1}{\eta}.$$

Nach dieser Theorie würde also der empirisch bestimmte Wert der Constante nicht ganz doppelt so gross sein (0,22 gegen 0,13) wie der theoretische.

Doch auch diese Theorie entspricht der Wirklichkeit nur in sehr geringer Annäherung. Eine strenge Theorie der Biegung eines Stabes ist von de Saint-Venant¹⁾ entwickelt worden. Nach dieser sind die tangentialen Kräfte im Querschnitt des gebogenen Stabes nicht constant, sondern von Punkt zu Punkt

1) de Saint-Venant, Liouville's Journal (2) 1. p. 89 - 189. 1856.

veränderlich, und zwar sind scheerende Kräfte an jedem Elemente wirksam nicht bloss in der Ebene der Biegung (der xy -Ebene in der obigen Bezeichnungsweise), sondern auch in der durch die Axe des Stabes hindurchgehenden, auf der Biegungsebene senkrechten Ebene (xz -Ebene).

Die letzteren mögen mit p_{xz} , die ersteren mit p_{xy} bezeichnet werden. Beide sind an den äusseren Begrenzungsflächen der Platte Null und im übrigen complicirte Functionen von y und z , die von de Saint-Venant für einen rechteckigen Stabquerschnitt berechnet worden sind. Die Kräfte p_{xz} kommen für uns nicht in Betracht, um so weniger, als ihr Mittelwert in Richtung der Breite b , die in unserer Bezeichnungsweise in die z -Axe fällt, d. h.

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xz} dz = 0$$

ist. Die Kräfte p_{xy} bedingen die beschriebene Doppelbrechung im Knoten. Da die Differenz der Brechungsexponenten an jeder Stelle dem Werte dieser Kraft oder der durch sie bedingten elastischen Deformation proportional sein wird, so wird die ganze Phasendifferenz, die man durch die ganze Breite b der Platte in einer bestimmten, zur z -Axe parallelen Richtung hindurch wahrnimmt, der Summe jener Kräfte für die ganze Breite b , d. h. der Grösse:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xy} dz$$

proportional sein. Für diese Grösse giebt die de Saint-Venant'sche Formel den einfachen Ausdruck:

$$\int_{-b/2}^{+b/2} p_{xy} dz = \frac{3}{2} \frac{P'}{d} \left(1 - \frac{4y^2}{d^2} \right).$$

Integriert man diesen noch über dy von $-d/2$ bis $+d/2$, so erhält man als Summe aller auf den Querschnitt $b \times d$ in Richtung der y -Axe wirkenden scheerenden Kräfte:

$$\int_{-d/2}^{+d/2} dy \int_{-b/2}^{+b/2} dz p_{xy} = P.$$

Bezeichnet man mit P den Mittelwert dieser Kraft, bezogen auf die Flächeneinheit, so würde:

$$P = \frac{P'}{b \times d}$$

sein. Dieser Wert würde dem P in Formel (2) entsprechen. Aber nach der de Saint-Venant'schen Theorie würde sich dieses P nicht gleichmässig über den Querschnitt in Richtung der Dicke der Platte verteilen, sondern sein für die Doppelbrechung maassgebender Mittelwert, genommen in Richtung der Breite b der Platte, würde nach der Formel:

$$(28) \quad \frac{3}{2} P \left(1 - \frac{4 y^2}{d^2} \right).$$

variieren. Die Kraft würde am Rande für $y = \pm d/2$ Null sein, in der Mitte für $y = 0$ das Maximum $\frac{3}{2} P$ haben.¹⁾ Den gleichen Verlauf müsste dann die Doppelbrechung zeigen.

Wenn es gestattet wäre, dieses Ergebnis des de Saint-Venant'schen Problems auf die Deformation eines schwingenden Stabes im Knoten zu übertragen, so würde auch hier die scheuernde Wirkung in der Mitte der Platte anderthalbmal grösser anzunehmen sein, als sie oben aus dem Mittelwert der Schubkraft für den ganzen Querschnitt berechnet worden ist. Demgemäss würde auch die Constante der Formel (27) anderthalbmal grösser sein, also gleich 0,192, womit eine ziemliche Annäherung an den empirischen Wert 0,22 erreicht wäre.

Allerdings würde in diesem Falle die Berechnung des Δ_k aus den in Taf. I, Figg. 10 und 11 abgebildeten Aufnahmen nicht mehr streng richtig sein, denn diese Berechnung beruht auf der Annahme, dass die Doppelbrechung im Knoten gleichmässig über den Querschnitt verteilt sei. Nimmt sie nach den Rändern hin ab, so wird offenbar die Amplitude der Wellenlinie, welche der in der Mitte der Platte gelegene Interferenzstreifen des Gypskeiles beschreibt, kleiner ausfallen, als der maximalen

1) Auch die Technik verwendet die gleiche Formel zur Berechnung der Schubspannungen in gebogenen, prismatischen Trägern. Vgl. C. Bach, *Elasticität und Festigkeit*, p. 414. 3. Auflage. Berlin 1898.

Doppelbrechung in der Mitte entsprechen würde. Auch ist es dann erforderlich, den Streifenabstand des Gypskeiles nicht aus der Aufnahme der schwingenden, sondern aus der der ruhenden Platte zu entnehmen. Man kann unter Zugrundelegung des durch Formel (28) ausgedrückten Gesetzes die Correctionen berechnen, die man an den auf p. 32 mitgetheilten Zahlen anbringen muss, um den wirklichen Betrag der maximalen Doppelbrechung in der Mitte der Platte daraus zu erhalten. Ich begnüge mich, das Resultat dieser Correctionsrechnung anzugeben. An Stelle der Werte 0,26 und 0,33 würde sich ergeben:

$$\Delta_k = 0,24 \text{ bez. } 0,30,$$

daher:

$$\Delta_k/a = 1,33 \text{ bez. } 1,30,$$

also im Mittel

$$\Delta_k = 1,315 \times a$$

und

$$\frac{\Delta_k}{\Delta_b} = \frac{0,20}{\eta}.$$

Damit wäre eine noch weitere Annäherung zwischen dem beobachteten und dem berechneten Werte (0,19) erzielt.

Diese Ueberlegungen beruhen auf der Voraussetzung, dass die Doppelbrechung im Knoten nach dem durch Gleichung (28) ausgedrückten Gesetz innerhalb der Dicke der Platte veränderlich ist, und führen zu der Frage, ob sich diese Veränderlichkeit denn nicht unmittelbar in den Beobachtungen kundgegeben hat. Ich habe die Erscheinungen oben so beschrieben, wie sie sich mir ohne jede Voreingenommenheit dargestellt haben, und dabei war der Eindruck zunächst der, dass die Doppelbrechung im Knoten im wesentlichen constant wäre. Sieht man schärfer zu, so bemerkt man wohl einige Besonderheiten, welche darauf hindeuten, dass die von der Theorie geforderte Abnahme der Doppelbrechung nach den Rändern der Platte zu in der That vorhanden ist. So fällt es bei Aufnahmen wie Figg. 7 und 9 der Taf. I offenbar auf, dass die Ränder der Platte nicht als scharfe Begrenzungslinien des Bildes sichtbar sind, wie bei den Aufnahmen im Schwingungsbauche, nur natürlich in Form gerader Linien;

die hellen Streifen in Fig. 7 erscheinen vielmehr nach oben und unten hin verengt und verwaschen; ebenso erscheinen die Wellenlinien der hellen Interferenzstreifen in Fig. 9 nach den Rändern hin eigentümlich flach gedrückt. Entnimmt man endlich der Fig. 9 den Abstand der hellen Streifen und vergleicht ihn mit dem Abstand der ruhenden Streifen in Fig. 8, so findet man den letzteren grösser, um ungefähr soviel, wie die Theorie nach der angegebenen Gesetzmässigkeit verlangen würde.

Eine genauere Untersuchung dieses Punktes aber ist auf Grund des vorhandenen Beobachtungsmateriales nicht möglich. Die strenge Prüfung des durch Gleichung (28) ausgedrückten Gesetzes dürfte auch bei schwingenden Platten einige Schwierigkeiten bereiten wegen der sowieso schon recht verwickelten Versuchsanordnung. Dagegen treten Erscheinungen der gleichen Art auch bei statischer Verbiegung der Platte auf und lassen sich hier bequemer und mit aller wünschenswerten Genauigkeit verfolgen. Da eine Untersuchung über die durch scheerende Kräfte hervorgerufene Doppelbrechung in gekrümmten Glasplatten noch nicht vorzuliegen scheint, so werde ich in einer zweiten Abhandlung ausführlich auf die Verhältnisse bei statischer Verbiegung der Platten eingehen.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung aber fasse ich folgendermaassen zusammen:

In transversal schwingenden Glasplatten treten zwei Arten von Doppelbrechung auf. In den Bäuchen ist nur die eine, in den Knoten nur die andere Art vorhanden; an den dazwischen liegenden Stellen sind beide gleichzeitig vorhanden.

Die in den Bäuchen auftretende Doppelbrechung entsteht durch die Krümmung der Platte und ist von der gleichen Art, wie die in bekannter Weise durch statische Verbiegung hervorgerufene. Ihre Axen liegen in der Längsrichtung der Platte und senkrecht dazu; ihre Stärke nimmt von der neutralen Mittellinie nach den Rändern hin, proportional dem Abstand von der Mittellinie, zu und die Grösse der specifischen Doppelbrechung des Glases ergibt sich aus diesen Beobachtungen ebenso gross wie aus Beobachtungen statisch verbogener Platten.

Die in den Knoten auftretende Doppelbrechung rührt von den in der Platte bei ihrer Verbiegung entstehenden scheerenden Kräften her. Ihre Axen liegen unter 45° zur Längsrichtung der Platte; ihre Grösse ist gering; sie scheint, entsprechend der Theorie, in der Mitte der Platte am grössten zu sein und nach den Rändern hin abzunehmen. Ihr Verhältniss zur Schwingungsamplitude der Platte stimmt sehr nahe überein mit demjenigen Wert, der sich theoretisch dafür berechnen lässt, wenn man die von de Saint-Venant für die scheerenden Kräfte bei statischer Verbiegung gegebenen Ausdrücke auf die Verbiegung der schwingenden Platte überträgt.

Greifswald, October 1900.

(Eingegangen 26. October 1900.)

geb
find
des
Es
zu
gun
Ma
Da
zeu

Eir
To
ver
kle
wa
Ra
To
Lu
ga
Vo
me
we
ku
sch
sac

2. *Darstellung der Lamellentöne;* *von Victor Hensen.*

In der Arbeit über die Lamellentöne¹⁾ war ich schuldig geblieben, Aufnahmen der Wellenformen zu geben. Da sich findet, dass diese unentbehrlich für eine eindringendere Analyse des Vorganges sind, erlaube ich mir, dieselben jetzt zu bringen. Es handelt sich also darum, mit Hülfe des Lichtes gleichsam zu belauschen, was geschieht, wenn sich die Massenschwingung eines Gases auf ein anderes Gas überträgt, wie die Massenschwingung selbst gestaltet ist, und wie sie durch die Dazwischenkunft einer continuirlich fließenden Gaslamelle erzeugt wird.

Der Druck des Brenngases hat auf die Tonhöhe wenig Einfluss. Man kann dessen Zuleitung comprimiren, ohne die Tonhöhe erheblich zu ändern. Das Flackern der Flamme verändert deren Ton, aber der Vorgang ist langsam und in dem kleinen, 45 cbm fassenden Raum, in dem experimentirt wurde, war es meistens nicht störend. Wenn die Flamme in engem Raum eingeschlossen wird, zerstört die Hitze, die je nach der Tonhöhe verschieden stark entsteht, die Constanz des Tones. Der Luftstrom der Lamelle wurde aus einem 2 cbm fassenden Separatgasometer im Keller des physiologischen Institutes entnommen. Von dort ging er durch ein Rohr von etwa 1 cm Lichtendurchmesser in einen festen Behälter von 0,5 cbm-Inhalt, dann weiter durch feste Röhren und schliesslich durch einen weiten kurzen Kautschukschlauch zu dem Spaltrohr. Die variometrischen, durch vorüberziehende Wolken und Aehnliches verursachten, kurzen Schwankungen des Luftdruckes können auf

1) V. Hensen, Ann. d. Phys. 2. p. 719. 1900.

die schwere Glocke des Gasometers keinen Einfluss haben, derart, dass im Laufe weniger Secunden der Luftstrom irgend hätte schwanken können. Die Vorsicht war unnötig weit getrieben, denn es zeigte sich, dass die Tonhöhe immer noch sehr stark, an einigen Tagen um eine Terz in ein oder zwei Secunden schwankte. Diese Schwankungen mussten also von Einwirkungen im Zimmer herrühren. Sie waren stark, wenn das Variometer der hiesigen Wettersäule unruhig war, es fanden sich auch Zeiten, wo der Ton unverändert blieb, sogar einmal eine Stunde lang sich völlig hielt. Die Störungen müssen daher auf Beeinflussung der ausfliessenden Lamelle durch kleinste variometrische Schwankungen der Hauptsache nach bezogen werden. Ich habe bereits angegeben¹⁾, dass der Schneidenton bei 46,16 m Geschwindigkeit der blasenden Luftlamelle 3520 Schwingungen, bei 5,3 m unter sonst gleichen Verhältnissen 456 Schwingungen ergab. Der Druck einer Luftsäule von 110 m und von 1,4 m Höhe würde diesen Geschwindigkeiten äquivalent sein. Die Tonhöhe wird sich um eine Schwingung ändern, wenn die Höhe jener Luftsäulen sich um 3,58 cm ändert. Um die entsprechende Druckänderung in dem Zimmer hervorzurufen, muss sich die Luftmasse des Zimmers um 0,14 g oder 108 ccm ändern. Ein schwacher Windstoss gegen die Fensterwand muss mehr als genügen, diese Aenderung fast augenblicklich zu erzeugen. Wenn diese Rechnung annähernd zutrifft, erklärt sich die grosse variometrische Empfindlichkeit der Flamme.

Wenn in einem anderen Raum eine Thür ging, änderte sich momentan die Tonhöhe. Die Flamme ist sehr empfindlich gegen Geräusch, ob nun von diesem, ob von begleitender Druckschwankung, vielleicht von beiden, jene Tonschwankung abhängt, habe ich nicht geprüft, wollte aber doch auf diese Störungsursache aufmerksam machen.

Die Momentaufnahmen, an sich schwierig wegen des Intensitätsunterschiedes des Lichtes in den Flammenbezirken, wären wohl unmöglich gewesen, wenn nicht der Stimmgabelton auch seinerseits die Flamme beeinflusst hätte. Es kommt bei

1) l. c. p. 785.

sehr schwachem, einige Millimeter Wasser betragenden Winddruck vor, dass die Flamme aufhört zu tönen, sich also ein Gleichgewichtszustand zwischen Lamelle und Flamme einstellt. Dann tönt die Flamme, sobald und solange die Stimmgabel stark schwingt. Sind die variometrischen Störungen, bei richtig eingestellter Flamme gering, so zwingt die erklingende Gabel ruhigen Ton, meist wohl in bestimmter Phasenstellung, wenn die Entfernung nicht verändert wird. Stark ist dieser Einfluss nicht.

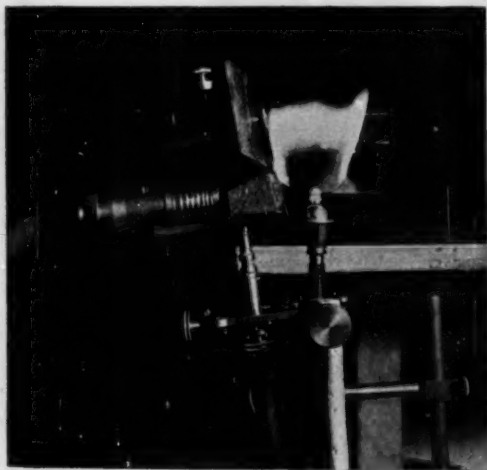


Fig. 1.

Der meistens gebrauchte Apparat ist in Fig. 1 bei $3\frac{1}{2}$ maliger Verkleinerung abgebildet. Die gezeichnete Art der Aufstellung dient zur Uebertragung des Schneidentones auf das daneben fließende Flammengas. Man sieht an der Flamme des Schnittbrenners die kleine Spitze, die den Entstehungsort der ersten Welle anzeigt. Infolge paralactischer Verschiebung erscheint die Spitze im Bilde tiefer stehend, als dem Sachverhalt entsprach. Rechts hinter der Flamme sieht man das eine der reflectirenden Prismen auf der Gabel. Diese

selbst sieht man nicht, wohl aber den Fuss und den Tisch, auf dem sie steht. Die Einlage in die Luftlamelle ist geknickt, um ihre Erwärmung möglichst zu vermeiden. Das mit Spiralfeder umwundene Rohr ist das Spaltrohr, der geteilte Schraubenkopf auf ihm dient dazu, den Spalt zu erweitern. Der geteilte Schraubenkopf oben hinter der Einlage dient dazu, diese zu heben. Die beiden hinter dem Rohr sichtbaren Schrauben dienen dazu, die Schraube zur Hebung der Einlage genau in Richtung des Luftstromes zu stellen. Ein hier nicht sichtbarer Schlitten gestattet die Vor- und Rückbewegung der Einlage. Das Spaltrohr wird von einer Stange getragen, die unten, wo ein für andere Zwecke angebundenes Rohr hängt, einen Schraubenkopf trägt, der eine Hebung und Senkung der Luftlamelle gegen die Flamme gestattet. Links an dem Tisch, der das Spaltrohr trägt, findet sich ein Schraubenkopf, der einen Schlitten regiert, mit dem der blasende Apparat der unabhängig aufgestellten Flamme gepäht werden kann. Für die angeblasene und tönende Flamme wird das Spaltrohr senkrecht gestellt und dessen Einlage entfernt.

Die Stimmgabeln machten 155,5 und 311 Schwingungen. Die erstere hat 10 mm dicke Branchen bei 18 cm Länge. Wenn sie das 225 mm entfernte Object um 12 mm verbreitert, hat das Prisma eine Elongation von etwa 2 mm, sodass sich der Krümmungsradius zu etwa 75 mm berechnet. Die höhere Gabel hat eine Länge der Branchen von 20 cm, die Dicke vorn ist 14 mm, hinten 23 mm. Diese Form wählte Hr. R. König auf meinen Vorschlag. Die Gabel klingt gut und andauernd, aber der Krümmungsradius ist gegen 140 mm lang, was für die hier verfolgte Absicht ungünstig ist.

Uebertragung der Bewegung.

Die Fig. 2¹⁾ oben links giebt die Flamme vor der mit 155,5 Schwingungen tönenden aus CO₂ bestehenden La-

1) Alle Figuren dieser Arbeit sind, soweit nichts anderes erwähnt wird, in natürlicher Grösse. Fig. 2 ist $\frac{1}{6}$ unter natürlicher Grösse.

melle, analysirt durch unison schwingende, horizontal stehende Gabel. Man sieht vier Wellen, die etwas spitz zulaufen, auch ist die erste klein. Ich erlaube mir, diese Abbildung zu



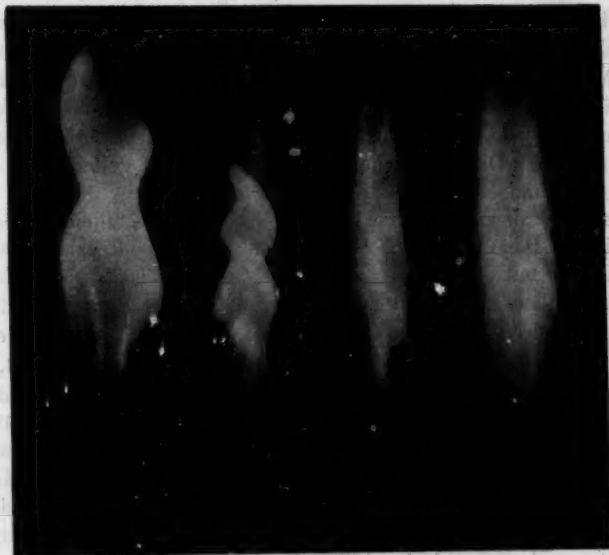
Fig. 2.

geben, obgleich sie in gewissem Sinne eine Fälschung enthält. Sie giebt nämlich nur das Bild der einen Extremstellung der Gabel, also etwa der Stellung in $\cos 0^\circ$, in allen anderen Positionen war die Flamme durch die CO_2 in ihrer Leucht-

kraft so beeinträchtigt, dass die Photographie sie nicht mehr zeigt. Das Bild darunter zeigt den Ton in Luftlamelle mit unisono schwingender Gabel von 311 Doppeltvibrationen. Die Abbildung giebt wegen der geringeren Durchbiegung der höheren Gabel nur eine schmale Verdoppelung der Wellenlinie. Diese ist für Phase $\cos 180^\circ$ deutlich genug, aber für $\cos 0^\circ$ ist sie kaum zu erkennen. Nur der Wellenberg dieser Phase, der auf das Wellenthal der anderen Extremlage fällt, bildet einen deutlichen hellen Fleck. Das Bild oben rechts ist Schwingung 155 in Luft mit Unisonogabel analysirt. Vor der Schneide liegt gerade ein Wellenthal. Man sieht die Wellen beider Extremstellungen der Gabel, Thal der einen Stellung gegen Berg der anderen. Die dazwischen liegenden hellen Linien geben die Wellenumkehrpunkte, $\sin 90^\circ$ und 270° zur Zeit der übrigen Phasen der Gabel. Die letzte Figur endlich zeigt das Aussehen oder vielmehr den Abdruck der Schwingung 311 analysirt durch Gabel 155,5. Diese Bilder, deren mir natürlich eine viel grössere Auswahl vorliegt, ergeben Folgendes. 1. Die Wellenamplituden nehmen rasch ab, mehr als fünf Wellen habe ich nicht erhalten. 2. Der abstehende Rand der die Bewegung aufnehmenden Flamme kommt nicht mit in sichtbare Schwingungen. Es dürften von dem Wellenrande aus nach allen Seiten hin Molecularschwingungen gehen, deren Kugelflächen am anderen Rande so sehr übereinander greifen, dass sichtbare Vorbuchtungen nicht entstehen. 3. Die Wellenlängen sind innerhalb der untersuchten Grenzen, bei denen zur Erzielung des höheren Tones der Luftbewegung in der Lamelle grössere Geschwindigkeit gegeben werden musste, **unabhängig** von der Tonhöhe. Die Wellen der beiden unteren Figuren sind nur wenig und durchaus nicht halb so kurz, wie die der oberen, eine Octav tiefer klingenden Wellen. Die *Thatsache der Unabhängigkeit der Tonhöhe von der Wellenlänge* überraschte mich, indessen ist sie nicht neu. Wenn man durch die Scheibe einer, mit constanter Geschwindigkeit laufenden Sirene stark und schwach bläst, bleibt der entstehende Ton gleich hoch, trotzdem die Abstände der einzelnen Luftballen verschieden sein müssen.

Bewegungsart in den tönenden Flammen.

Die Fig. 3, 4, zeigt die Flamme von 155,5 Schwingungen, analysirt durch *seitlich* stehende, horizontal stark



A

B

C

D

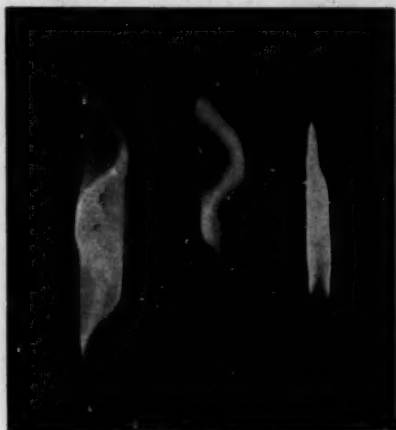
Fig. 3.

schwingende Unisonogabel. Es sieht so aus, als wenn die Flamme aus Ballen bestände, das ist aber eine Missdeutung des Bildes. *In der Richtung von vorn nach hinten schwingt die Flamme wellenförmig*, der äusseren Contour links giebt die Form der Welle zur Zeit 0° , wenn der Contour rechts die Form zur Zeit π giebt. Die inneren Contouren des hellen Randes geben die Gestalt der Flamme etwas weniger genau wieder, weil die ganze Flamme in etwas verschiedener Phase zweimal darüber hin gelaufen ist, immerhin kann man auch diese in der

Photographie gut erkennen, in der Reproduction leider nicht. Das Licht zwischen den inneren Rändern rührt von allen übrigen Phasen der Gabel her, hier liegt um so weniger Licht, je stärker die Gabel schwingt und je weiter die Flammen auseinander geworfen sind. Wenn sie sich, wie in der Phase der Wellenthäler, aufeinander zu bewegt haben, wird der dann schmale Zwischenraum sehr hell. Man erkennt, dass namentlich das Verglühen des Gases eine gewisse Rolle spielt, die Spitzen verdünnen sich, während die Welle sich doch vielleicht verbreitern sollte, weil ihre einzelnen Moleküle nicht einander parallel gerade nach oben, sondern etwas divergent verlaufen. Das Gas scheint ziemlich plötzlich gelbglühend zu werden und *glüht dann während etwa 0,01 Sec.*¹⁾ Es wäre ja möglich, dass während dieser Zeit sich die glühenden Gas-
 theilchen immer wieder ergänzten, indessen scheint es mir nach Bildern mit vertical schwingender Gabel, dass die Theilchen des Wulstes, der sich unter der anblasenden Lamelle bildet, bis zur Flammenspitze hin verfolgt werden können und ein Austausch unter diesen ist wenig wahrscheinlich. Die Fig. 3, B giebt den Ton 311 mit Unisonogabel. Die Flammenbilder sind hier weniger weit auseinander gezogen, die Wellenthäler greifen ineinander und geben leuchtende Flecke, zwischen den Wellenbergen finden sich weniger leuchtende Streifen. Man erhält den zwingenden Eindruck, dass die Flammenbilder sich umeinander winden, und wenn der Ton nicht genau stimmt, sich umeinander drehen. Die Entstehung dieser Figur wird durch das Constructionsbild Fig. 10, III, IV, p. 57 erläutert. Fig. 3, D giebt einen harmonischen Ton der tieferen Gabel, ich glaubte zu hören, dass es die Sext sei, aber ich kann die Tonhöhe an der Figur nicht erkennen. Fig. 3, C giebt die Octave des Flammentones, mit der tieferen Gabel analysirt. Die tiefere Gabel giebt das Grenzbild halb so häufig, als die Unisonogabel, die Mittelpartien des Bildes sind daher heller, sonst zeigt sich kein Unterschied gegen Fig. 3, B. Im Ganzen sind die Wellen an der angeblasenen (rechten) Seite etwas höher, als an der linken Seite. Dies kommt, weil die Lamelle

1) Angereichert durch Benzin ist ihre Glühzeit etwas länger.

nicht so tief in die Flamme eindringt und daher auf deren ihr zugewandte Seite stärker einwirkt, als auf deren abgewandte Seite. Ausserdem sind die Wellen etwas gegen einander verschoben. Dabei wirken verschiedene Factoren. Die Flamme stellt sich ein wenig schief nach hinten, während die Gabel bei diesen Bildern horizontal stand, ausserdem liegt der Flammenwulst hinten höher als vorne, vgl. Fig. 6, B, p. 51. Die Töne dieser Flammen waren schwach, sie waren in 7 bis 9 m Entfernung gerade noch hörbar. Die folgende Fig. 4 giebt die Analyse der Flammenbewegung durch vertical schwingende Gabel.



A B C

Fig. 4.

Die beiden ersten Bilder (Fig. 4) sind in Seitenansicht, das dritte etwas verkleinerte in Ansicht von der Rückseite aufgenommen. Man sieht bei diesen Unisonoaufnahmen deutlich, dass sich die Flamme in der Richtung von vorn nach hinten *windet*, während sie seitlich nur unbedeutende Wulstungen zeigt. Bei diesen Aufnahmen kommt es, wie die Construction Fig. 10 zeigt, darauf an, dass die Elongation des Bildes eine halbe Welle,

oder deren vielfaches beträgt. Die Construction des Bildes in Fig. 10 giebt einen sehr ungünstigen Fall, man braucht aber nur die punktirte Welle I um etwas nach II hin verschoben zu denken, um zu erkennen, dass die Wellenform bei günstiger Longitde sehr scharf hervortreten muss, wobei dann die Buchten durch die Bilder der mittleren Phasen der Gabel ausgefllt werden. Diese Art der Analyse hat den Vorteil, dass man an kurzen Figuren das obere und das untere Ende der Figur nur in einer Phase erhält, doch müsste



Fig. 5.

im Bilde die jedesmalige Elongation kenntlich gemacht sein. Dies wurde leider bei der Aufnahme verabsäumt, doch hat die Elongation des Bildes etwa 5 mm betragen. In der dritten Figur ist die Wulstung gerade bis an die Spitze der Flamme gekommen; bei der Beobachtung sieht man die ganz spitz endende Flamme, durch den, bei Tonschwankungen auftretenden Phasenunterschied veranlasst, zur Spitze hinaufkriechen. Die Vorgänge an dem Entstehungsort des Tones sieht man gleichfalls bei dieser Analyse am deutlichsten, doch laufen die Dinge meistens zu schnell, um ganz befriedigend studirt werden zu können.

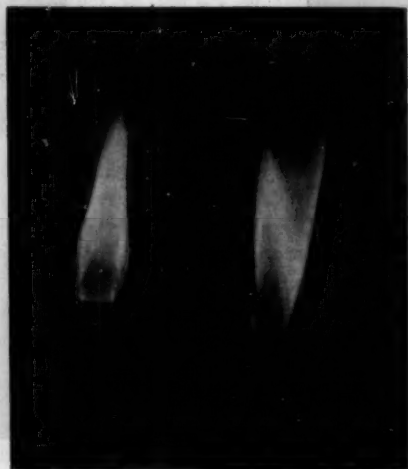
Die beigegebene Fig. 5 giebt die Flamme vor horizontal und stark schwingender Gabel von der Rückseite gesehen. Man sieht hier deutlich, dass die Flamme in der Querrichtung aufgewulstet ist. Namentlich unten, dicht über der angeblasenen Stelle ist die Flamme links verdünnt, rechts verdickt.¹⁾ Weiter nach oben scheint die Wulstung sich sogar zu verstärken. Zugleich erkennt man, dass hier Wulst gegen Thal steht, was nur möglich ist, wenn *Ballen* längs der Welle verlaufen. Es complicirt sich also der Vor-

1) Leider in der Reproduction zu undeutlich.

gang; in der einen Richtung eine wellig gebogene Flamme und senkrecht dazu eine in Ballen aufwärts eilende Flammenmasse.

Die Entstehung der periodischen Massenbewegung.

Die Bildung der Periode — ohne bemerkbare Wirbel — durch zwei continuirlich fließende Gasströme in den Einzelheiten zu studiren, erwies sich mir besonders schwierig. Vielleicht war die Witterung zu ungünstig. Ich kann wohl Abbildungen des Vorganges geben, aber ich bin nicht ganz sicher, ob in dem Augenblick der photographischen Aufnahme nicht



A

B

Fig. 6.

doch eine kleine Phasenverschiebung in der Welle stattgefunden hat, denn so genau kann die Bewegung durch den zweiten Spiegel nicht überwacht werden, auch schwingt die Stimmgabel während der Aufnahme fortwährend ab, oder wenn man während derselben streicht, ist vielleicht die Bogenführung nicht tadellos. Ich gebe zunächst Fig. 6 der nicht analysirten Flamme in Seiten- und Vorderansicht.

Die angeblasene Stelle tritt in dieser Form nur auf, wenn die Flamme ziemlich hoch oben angeblasen wird, sie zeigt aber den Raum, innerhalb dessen die Entstehung der periodischen Bewegung erfolgt. Bei der Seitenansicht (Fig. 6, *B*) tritt ein doppelter Wellenberg hervor, bei der Ansicht von vorne (Fig. 6, *A*) sieht man die Verbreiterung der Flamme, die unten durch eine etwas schärfere, oben durch eine etwas weniger scharfe helle Leiste begrenzt erscheint. Die Flamme ist etwas unsymmetrisch geformt, woran wohl ein kleiner Fehler im

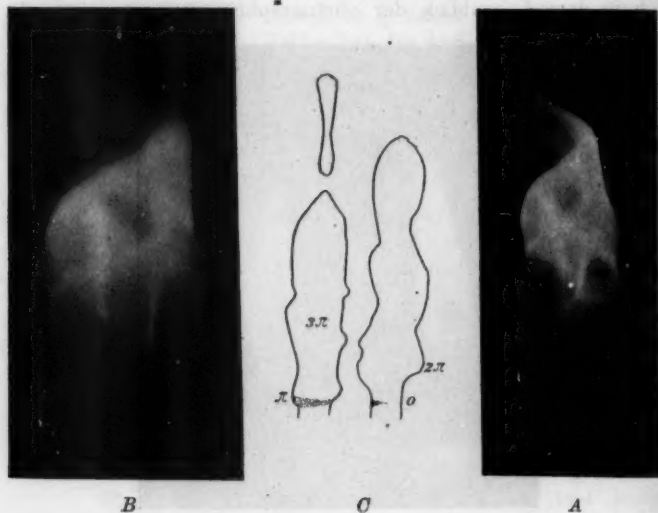


Fig. 7.

Spalt oder im Brenner die Schuld tragen wird. Es verwickeln sich die Bilder nicht nur dadurch, dass der eingeblasene Sauerstoff die Leuchtkraft der Flamme modificirt, sondern auch wegen der Zurückbiegung der Flamme und deren schräger Wulstung, die namentlich für die Seitenansicht störend wirken. Die beiden Figuren sind übrigens etwas verkleinert.

Die Figg. 7, *A*, *B* und *C* zeigen die Flamme von vorn gesehen vor horizontal schwingender Gabel. Man sieht die Be-

wegung des Wulstes der Fig. 6, *A*, der in der Analyse natürlich nur einfach gesehen werden kann, recht deutlich. Bei allen Flammen dieses Abschnittes kommt die Phase der Schwingungen in Betracht. Die Phasen der Gabel, $\cos 0^\circ$ und $\cos 180^\circ$ geben den rechten und linken Rand der beiden entsprechenden Flammenbilder gut. Die Phasen der Flamme sind nicht identisch mit den Phasen der Gabel, wenn diese die Flamme feststellt. Die Wellenlänge des Tones in Luft beträgt etwa 2,19 m, die Gabel stand 0,225 m von der Flamme ab, der Luftdruck einer Gabelphase erreicht die Flamme erst, nachdem die Gabel $\frac{37}{360}$ ihrer Bewegung durchlaufen hat. Steht also z. B. die Gabel in $\cos 0^\circ$, so steht die Flamme in der Phase $\cos 360 - 37^\circ$, wenigstens angenähert; auf genaue Bestimmung kommt es noch nicht an.

Fig. 7 *A* zeigt den Verlauf der Bewegung des Wulstes recht gut. Der Wulst erscheint in einiger Breite, weil er sich gleichzeitig vom rechten und vom linken Rand der Flamme erhebt; schiebt man sich, der Wirklichkeit entsprechend, die beiden Flammenbilder zusammen, so erkennt man, dass es sich um einen linearen Wulst, wie ihn die Fig. 4, *C* zeigt, handelt. Im weiteren Verlauf verbreitert sich der Wulst und rundet sich zugleich mehr ab. Auffallend erscheint mir, dass der Wulst beim Aufsteigen in der Zeit der ersten Halbwelle fast gerade, dann aber deutlich sinusoid gekrümmt verläuft, in den Umkehrphasen stark in die Höhe gehend, dazwischen wellig geschweift. Solche Linie muss ein mit gleichmässiger Geschwindigkeit steigender Leuchtpunkt annehmen, wenn die Gabel mit ihrer Pendelbewegung sein Bild projicirt, eine gerade Linie kann er nur beschreiben, wenn er auch seinerseits eine pendelartige Bewegung nach oben vollführt. Die Figur zeigt, dass die Flammen nach der Spitze zu schmäler werden, weil das Gas sich verzehrt, während die Amplitude der Welle sich nicht zu vermindern scheint. Die Fig. 7, *B* zeigt eine ganz ähnliche Flamme, nur höher brennend und stärker auseinander gezogen. Ich lese sie so wie Fig. 7, *C* angiebt. Den unter dem Wulst liegenden Teil der Flamme giebt das Negativ wegen geringer Leuchtkraft dieses Teiles so schwach, dass er leider in der Reproduction nicht gekommen ist. Der

Wulst hat sich zur Gabelzeit 0 noch nicht gebildet, dann aber tritt er bald hervor und verstärkt sich bis zur Zeit π , darauf oder sehr bald danach steigt er auf und bildet zur Zeit 2π eine starke Vorragung, geht dann weiter nach 3π , wo er schon ziemlich ausgeglichen anlangt. Von da aus scheint sein Steigen sich zu verlangsamen.

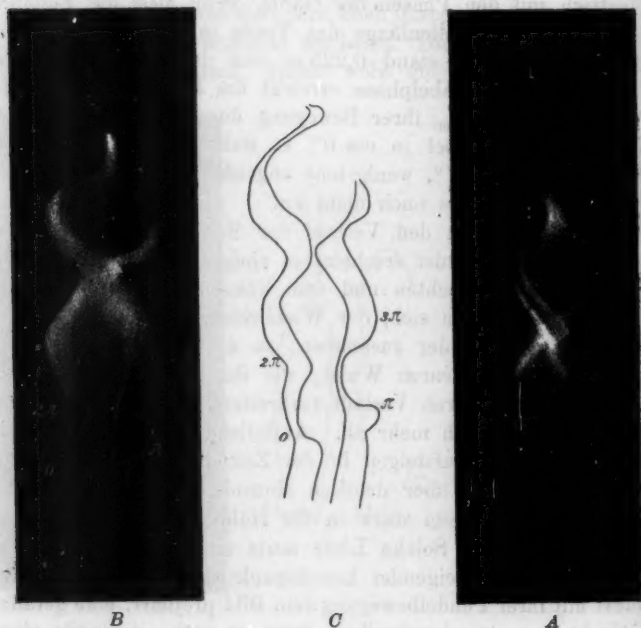


Fig. 8.

Weit schwieriger ist die Lesung der Flamme bei Seitenansicht (Fig. 8).

Die Flammen von 155,5 v. d. sind stark rückwärts gebogen, zeigen starke Windungen und ausserdem Verdickungen, daneben auch noch ein starkes Aufleuchten. Fig. 8, *A* leuchtet an der Wurzel sehr wenig, ich deute sie so, dass erst das Stadium π zur Ansicht gekommen ist, so sieht man sie meistens. Die Ansicht Fig. 8, *B* ist günstiger, ich lese sie so, wie die

Fig. 8, C zeigt. Bei O ist die Flamme tief eingeblasen, also verdünnt, indessen ist schon unter der blasenden Lamelle eine Gasanhäufung entstanden. Die Flamme verdünnt sich weiter, der Wulst steigt aber schon auf und nimmt, wie mir scheint, die blasende Lamelle, soweit sie innerhalb der Flamme liegt,



A



B

Fig. 9.

mit nach oben. Dann geht der Wulst hinüber nach 2π , aber hat sich namentlich nach oben hin schon etwas ausgeglichen, bei 3π und 4π ist die Ausgleichung schon weit fortgeschritten. Meine Durchzeichnung ist nach dem Negativ verfertigt, an dem man etwas mehr erkennen kann, als an dem Positiv.

Die Fig. 9, A, giebt den Ton 311, analysirt durch Unisonogabel. Die Deutung wird durch die geringe Biegung

dieser Gabel erschwert. Die Fig. 9, *B* giebt meine Lesung. Das Stadium *O* ist nicht herausgekommen, das Stadium 2π ragt etwas in die Einbuchtung des vorhergehenden Stadiums hinein, weil erst hier die Flamme sich zurückbiegt. Die Rückbiegung geht in der Diagonale der beiden Bewegungen, man sieht, dass das Brenngas rascher strömt, als die Luft der in sie eintretenden Lamelle. Die sonderbare Lücke zwischen 2π und 3π kann ich nicht anders erklären.

Der Vorgang der Tonentstehung ergibt sich also in der Weise, wie ich in der früheren Arbeit angab, nur wusste ich nicht, dass die angeblasenen Gasmassen sich neben der Ballung auch noch winden. Selbstverständlich läuft das einzelne Gasmolekül in der Diagonale der Kräfte, die auf sie einwirken, geradlinig weiter, aber diese Diagonale liegt für verschiedene Zeiten, also auch für verschiedene Moleküle, wie sie gerade in die Wirkungssphäre der anblasenden Lamelle eintreten, verschieden. Zur Zeit *O* bläst die Lamelle normal gegen den Gasstrom und buchtet diesen ein. Dieser Zustand dauert an während der Periode einer halben Schwingung, aber das Gas sammelt sich (durch Zurückprallen?) mehr und mehr unter der Lamelle an. Zur Zeit π drängt sich der Gaswulst nach oben, teils wohl die Lamelle durchsetzend, teils sie nach oben ablenkend. Dabei ist meines Erachtens auch noch ein photographisch nicht wirksamer Mantel der Flamme beteiligt. Zur Zeit 2π ist die Durchsetzung vollendet und nun schreitet der Gaswulst in der Periode bis 3π besonders rasch vorwärts, während Wulst sich zu einem Wellenberg abrundet.

Es kann ja erforderlich werden, noch mehr Flammenphasen festzulegen, was nach der weiterhin zu gebenden Anweisung leicht sein wird, aber vorerst dürfte genügen, was hier nachgewiesen worden ist.

Es möge noch kurz die Wirkung der Stimmgabel, die einfach ist, aber doch ihre besondere Eigentümlichkeit und meiner Ansicht nach auch ihren besonderen Vorteil hat, dargelegt werden (Fig. 10). Bei *C* liege das Centrum des Krümmungsradius einer Branche. 1 und 2 seien die beiden Spiegelstellungen, die Spiegel stehen gegen den Radius im Winkel von 45° . *L* und *L'*

sich um die Bestimmung der Winkel zwischen den reflectirten Strahlen und der optischen Axe, also $< \omega$ und $< u$,

$$\vartheta + \eta = \vartheta' + \eta' = 90^\circ. \begin{cases} \vartheta = 45^\circ + \beta, & \eta = 45^\circ - \beta, \\ \vartheta' = 45^\circ - \beta, & \eta' = 45^\circ + \beta. \end{cases}$$

Es seien $K1$ und $K2$ die Richtungsstrahlen, die von dem Punkt der Welle bei K auf die Mitte des Spiegels hinlaufen, $n\lambda$ und $n\lambda + \mu$ die Entfernungen zwischen K und dem O -Punkt, der bei H über der Mitte des Spiegels 1 liegen möge. Es ist

$$\frac{\pm n\lambda}{h} = \operatorname{tg} o, \quad \frac{\pm n\lambda \pm \mu}{h_1} = \operatorname{tg} p.$$

Die Einfallswinkel ε und ε' bestimmen sich zu

$$\varepsilon = \vartheta - o = 45^\circ + \beta - o, \quad \varepsilon' = \vartheta' - p = 45^\circ - \beta - p,$$

daher

$$\omega = \eta - \varepsilon = o - 2\beta,$$

$$u = \eta' - \varepsilon' = 2\beta + p.$$

Für $-n\lambda$ wird

$$\omega = -(2\beta + o),$$

$$u = 2\beta - p.$$

Die Lichtbrechung im Prisma ist vernachlässigt, die paralactische Verschiebung durch μ hat wenig Bedeutung. Vergrößerung von h hat nur insofern Einfluss, als dadurch die Wirkung der $< \beta$ mehr hervortritt. Auf diese Winkel kommt es vor allem an, daher ist ein relativ *möglichst kurzer Krümmungsradius der Stimmgabel zu erzielen*. Die Projectionen der Wellen sind bei I., II., und bei I., II. gezeichnet, die beiden Phasen liegen wegen grosser β etwas weit auseinander. Verkleinerung des $< \beta$ bringt die beiden Wellen näher zusammen und giebt etwa das Bild III und IV.

Die photographische Analyse der Tonentstehung wäre vollständig, wenn noch die blasende Lamelle dargestellt worden wäre. Darauf muss ich verzichten. Auch sie wäre, wie mir scheint, wünschenswert. Armirung einer Stimmgabel mit zwei ovalen, grossen und schräg gestellten Metallspiegeln würde den Moment der Photographie sehr kürzen. Wie ich leider zu

spät finde, lässt sich die Flamme in der Tonhöhe recht gut fesseln, wenn man eine *zweite*, unisono tönende Gabel dicht neben sie hält. Die Molecularschwingung der Luft wirkt auf die Massenschwingung der Flamme so ein, dass die Wulstbildung unter der blasenden Lamelle durch die Molecularschwingungen in der Luft verzögert oder beschleunigt wird.

Hr. Dr. Deetjen hat mir auch bei dieser Arbeit ausdauernd geholfen.

(Eingegangen 13. October 1900.)

Die Figuren 2, 8 und 9 liessen sich durch Autographie nicht klar genug herstellen, sie sind daher lithographirt worden.

3. Ueber die Absorption des Lichtes in Farbgläsern; von R. Zsigmondy.

(Hierzu Taf. III—VIII.)

Charakteristische Absorptionsspectren käuflicher Farbgläser sind schon öfters beschrieben worden; man findet z. B. die Absorptionsspectren des blauen Kobaltglases, des roten Kupferglases etc. in Vogel's Spectralanalyse irdischer Stoffe¹⁾ beschrieben und abgebildet. Es ist nun den Glastechnikern bekannt, dass die Farbe eines Glases nicht nur von der Natur des färbenden Oxydes (Eisenoxyd, Kobaltoxyd etc.), sondern auch in hohem Maasse von der Zusammensetzung der Glassubstanz selbst und in vielen Fällen auch von der Behandlung des Glases abhängig ist. So kann man mit Kupferoxyd blaue und grüne, mit Nickeloxyd gelbe und auch violette Gläser erhalten, je nach der Zusammensetzung des Glassatzes, welcher mit dem färbenden Oxyde verschmolzen wird.

Man kann ferner aus einem geeigneten chromhaltigen Glassatze sowohl dunkelgrüne wie auch grüngelbe, getrübte Gläser darstellen; hier ist die Behandlung des erschmolzenen Glases maassgebend für die Farbe des Endproductes.

Man ersieht aus diesen Beispielen, dass die Beschreibung des Absorptionsspectrums eines Farbglases, ohne Berücksichtigung der Zusammensetzung und Behandlung des Glases, nur in einzelnen, bestimmten Fällen von Wert sein kann.

Eine ausführlichere Arbeit von Eder und Valenta²⁾ befasst sich mit der photographischen Darstellung des ultravioletten und sichtbaren Absorptionsspectrums farbloser und gefärbter Gläser.

In der vorliegenden Arbeit, welche auf Anregung des Hrn. D. O. Schott im Laboratorium des Jenaer Glaswerkes ausgeführt wurde, soll auf Grund spectralphotometrischer

1) Vogel, Spectralanalyse irdischer Stoffe, Berlin 1889.

2) Eder u. Valenta, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien 1884. Eder u. Valenta berücksichtigen die qualitative und quantitative Zusammensetzung der Gläser.

Messung
Farb

samm
entsp
bei O
diese
und
darge

Nr.

1	N
2	F
3	N
4	F
5	N
6	F
7	N
9	N
11	F
15	F

noch
und
such

Gläser
der
je 1
farb

Messung ein möglichst getreues Bild der Lichtabsorption von Farbgläsern bestimmter Zusammensetzung gegeben werden.

Es wurden Gläser nach bestimmten Typen, deren Zusammensetzung den in folgender Tabelle gegebenen Zahlen entspricht, unter Zusatz bestimmter Mengen färbender Oxyde, bei Oxydationsfeuer abgeschmolzen, die Extinctionscoefficienten dieser Gläser mit dem Glan'schen Spectralphotometer gemessen und nach Reduction auf ein vergleichbares Maass in Curven dargestellt.

Tabelle I.

Nr.	Zusammensetzung der Glastypen						
	in Aequivalenten	in Procenten					
		SiO ₂	Na ₂ O	K ₂ O	CaO	ZnO	PbO
1	Na ₂ O, 3SiO ₂	74,5	25,4	—	—	—	—
2	K ₂ O, 3SiO ₂	65,7	—	34,3	—	—	—
3	Na ₂ O, CaO, 5SiO ₂	71,8	14,8	—	13,4	—	—
4	K ₂ O, CaO, 5SiO ₂	66,7	—	20,9	12,4	—	—
5	Na ₂ O, PbO, 5SiO ₂	51,4	10,6	—	—	—	38,0
6	K ₂ O, PbO, 5SiO ₂	48,7	—	15,2	—	—	36,0
7	Na ₂ O, ZnO, 5SiO ₂	67,6	18,9	—	—	18,25	—
9	Na ₂ B ₄ O ₇	—	30,7	—	—	—	69,3
11	B ₂ O ₃	—	—	—	—	—	100
15	Bleisilicat	20	—	—	—	—	80

Ausser den in der Tabelle angeführten Gläsern wurden noch zwei Borosilicatgläser (ein Natronborosilicatglas Nr. 12 und ein Barytborosilicatglas Nr. 14) in den Kreis der Untersuchung einbezogen.

Die Sätze der in der vorstehenden Tabelle angeführten Gläser wurden mit den färbenden Oxyden bez. mit Lösungen der Nitrats der färbenden Oxyde¹⁾ derart versetzt, dass auf je 100 g der farblosen Glassubstanz die folgenden Mengen färbenden Oxydes kamen:

Chromoxyd 1 g	Manganoxyd 1,0 g
Kupferoxyd 2 g	Eisenoxyd 2,0 g
Kobaltoxyd 0,1 g	Uranoxyd 2,0 g
Nickeloxyd 0,25 g	

1) Bei Chromgläsern auch mit reiner Chromsäurelösung.

Zur abgekürzten Bezeichnung obiger Farbgläser verwende ich die chemische Formel des färbenden Metalles und setze die Nummer des Glastypeus, mit welchem das Farboxyd in obigem Verhältnis verschmolzen war, als Index bei.

So bedeutet Cu_3 ein Glas, welches in 102 g enthält: 2 g CuO , 71,8 g SiO_2 , 14,8 g Na_2O und 13,4 g CaO ; es bedeutet Co_6 : ein Kalibteisilicatglas, welches in 100,1 Teilen 48,7 Teile SiO_2 , 15,2 Teile K_2O , 36,0 Teile PbO und 0,1 Teil Kobaltoxyd enthält.

Die Behandlung der Gläser war in allen Fällen die gleiche; ich werde sie bei den Kobaltgläsern kurz beschreiben.

Mit Hülfe des Glan'schen Photometers wurden für jedes Glas an verschiedenen Stellen des Spectrums die Extinctionscoefficienten bestimmt; es erwies sich als zweckmässig, den Bunsen'schen Extinctionscoefficienten beizubehalten. Bunsen und Roscoe¹⁾ definiren bekanntlich den Extinctionscoefficienten als den reciproken Wert derjenigen Schichtendicke, welche die Substanz haben muss, um das durch dieselbe fallende Licht bis auf $\frac{1}{10}$ der Intensität des auffallenden Lichtes durch Absorption abschwächen zu können.

Es ist der Extinctionscoefficient E

$$E = \frac{-\log J}{d},$$

wenn J die Intensität des durchgelassenen Lichtes, d die Schichtendicke des absorbirenden Glases bedeutet und die Intensität des auffallenden Lichtes gleich 1 gesetzt wird.

Da nun — gleiche Bestandteile der Lösung vorausgesetzt — der Extinctionscoefficient der Concentration des Farbstoffs proportional ist, ich aber mit verschieden concentrirten Lösungen (Gläsern mit verschiedenem Procentgehalt an färbender Substanz) operirte, da ausserdem Lösungsmittel von verschiedenem specifischem Gewicht zur Anwendung kamen, so mussten die für verschiedene Gläser gefundenen Extinctionscoefficienten auf einen bestimmten Gehalt von färbendem Oxyde in der Volumeneinheit bezogen werden, um vergleichbare Werte zu bekommen.

Ich nenne den auf den Gehalt von 1 mg Farboxyd pro Cubikcentimeter umgerechneten Extinctionscoefficienten die

1) Bunsen u. Roscoe, Pogg. Ann. 101. p. 233. 1857.

Absorptionsgrösse A des färbenden Oxydes für die betreffende Wellenlänge.

Es ist

$$A = \frac{E}{g \cdot S},$$

wenn S das specifische Gewicht des Glases und g die Anzahl Milligramm Farboxyd in 1 g des Versuchsglases bedeuten.

Die Grösse A wurde nun an verschiedenen Stellen des Spectrums bestimmt und als Function der Wellenlängen graphisch dargestellt.

Vereinfachungen und Fehlerquellen.

Dem Zwecke der vorliegenden Arbeit gemäss, ein den thatsächlichen Verhältnissen annähernd entsprechendes Bild der Lichtabsorption von *zahlreichen* Farbgläsern zu entwerfen, wurden einige Vereinfachungen bei der Messung der physikalischen Constanten durchgeführt, die bei ganz exacten Messungen nicht oder nur unter besonderen Umständen erlaubt sein würden.

So brachte ich, um nicht von jedem Farbglase zwei Plättchen verschiedener Dicke anwenden zu müssen, als Vergleichsglas vor die untere Spalthälfte ein farbloses Glas von annähernd dem gleichen Brechungsexponenten, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass dadurch die Fehler der Reflexion selbst bei stark gefärbten Gläsern genügend eliminirt werden.

Ferner wurde das specifische Gewicht derjenigen Glasarten, welche nur geringe Mengen färbender Oxyde enthielten, nicht besonders bestimmt, sondern gleich dem specifischen Gewicht des typischen, ungefärbten Glases selbst gesetzt.¹⁾

Als weiterer Mangel der vorliegenden Arbeit ist anzuführen, dass das benutzte Glan'sche Spectralphotometer im violetten Teile so lichtschwach war, dass die Messungen nicht über das ganze sichtbare Spectrum, sondern nur etwa bis zur

1) Der Extinctionscoefficient wurde nicht aus dem Mittel zahlreicher Winkelablesungen am Spectralphotometer berechnet, sondern meist aus dem Mittel zweier Ablesungen, wenn diese genügend genau untereinander übereinstimmten; bei einiger Uebung war dies nicht schwer zu erreichen. Diese Vereinfachung auf Kosten der Genauigkeit musste ich einführen, um das grosse Material in der gegebenen Zeit bewältigen zu können.

Wellenlänge $\lambda = 0,450 \mu$ durchgeführt werden konnten. — In solchen Fällen habe ich zuweilen den Verlauf der Curven nach Beobachtungen mit dem sehr lichtstarken Pulfrich'schen Vergleichsspectroskop¹⁾ ergänzt. Diese Ergänzungen, welche nur nach ungefährender Schätzung ausgeführt werden konnten, wurden im Liniensystem als punktierte Linien eingezeichnet.

Trotz der eingangs erwähnten Fehlerquellen haben die Messungen an jenen Gläsern, welche einen Vergleich untereinander zulassen, eine recht befriedigende Uebereinstimmung im Verlauf der Curven ergeben.

Bei denjenigen Farboxyden, welche unter den gegebenen Verhältnissen in einer bestimmten Oxydationsstufe in das Glas eintreten, waren andere Fehlerquellen, als die hier angeführten nicht zu befürchten, wohl aber bei denjenigen Metalloxyden, welche im Glase in verschiedenen Oxydationsstufen enthalten sein können, wie die Oxyde des Eisens, Mangans und Chroms.

Hier konnte trotz Anwendung von Oxydationsmitteln im Satze und oxydirender Flammenführung leicht eine teilweise Reduction der höchsten möglichen Oxydationsstufen eingetreten sein und die Reinheit der Resultate trüben. Auf diese Verhältnisse werde ich später zurückkommen.

Kobaltgläser (Taf. III).

Das Kobalt wurde dem Glassatz in solcher Menge zugesetzt, dass auf 100,1 g fertiges Glas 0,1 g CoO kamen. Die Behandlung der Kobaltgläser war die gleiche, wie die der übrigen Gläser; sie wurden bei oxydirender Flamme abgeschmolzen, zur Beseitigung der Schlieren in feuerflüssigem Zustande geführt, hierauf in Formen ausgegossen und nach dem langsamen Erkalten zu Platten geschnitten. Die Platten wurden geschliffen und polirt und hierauf mit dem Spectralphotometer untersucht.

Die Absorptionsgrößen der Silicatgläser Co_6 , Co_7 , des Boraxglases Co_8 finden sich in Taf. III dargestellt.²⁾ Zwischen

1) R. Pulfrich, Zeitschr. f. Instrumentenk. 1898. p. 391. Vgl. auch Specialprospect der Firma Zeiss in Jena.

2) Statt der Absorptionsgrößen A habe ich, um den Maassstab des Linienpapieres nicht abändern zu müssen, die Grösse $20 A$ ein-

den Curven von Co_6 und Co_7 liegt diejenige von Co_4 ; die letztere ist nicht eingetragen.

Mit Hülfe des Vergleichsspectroskopes wurden noch die Gläser Co_1 und Co_3 mit den obigen verglichen. Es ergibt sich, dass das Spectrum von Co_3 mit dem von Co_7 zusammenfällt und dasjenige von Co_1 mit dem von Co_6 .

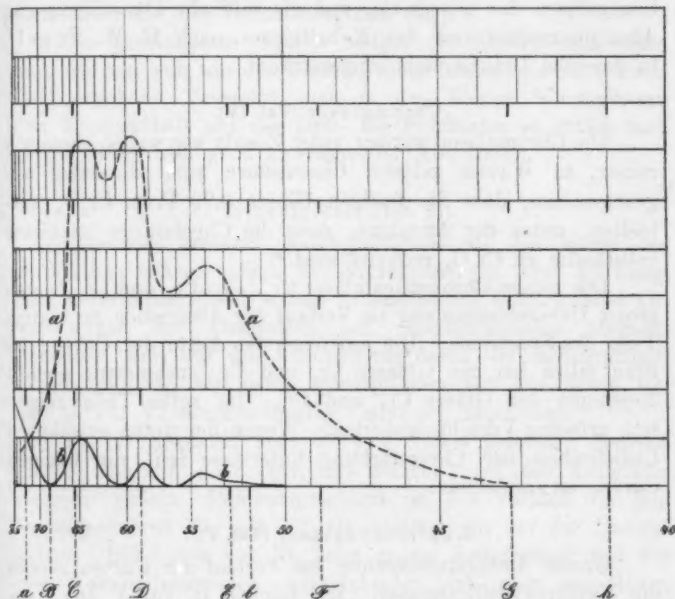


Fig. 1.

a Absorptionsspectrum des Kobaltglases nach Messung mit dem Spectralphotometer.

b Absorptionsspectrum des Kobaltglases nach Beobachtung mit dem Spectroskop.

Von Interesse ist die weitgehende Uebereinstimmung der Absorption der nach dem Typus $\text{R}'_2\text{O} \cdot \text{R}'\text{O} \cdot 0.5\text{SiO}_2$ zusammengesetzten Kobaltgläser.

Viel geringer, wenn auch im Verlauf ganz ähnlich, ist die Absorption des Boraxglases Co_9 ; ganz abweichend dagegen

gezeichnet. Ähnliche Abänderungen finden sich auch bei anderen Gläsern; so wurden bei Nickel- und Chromgläsern 100 Å, bei den sehr schwach absorbirenden Eisengläsern sogar 3000 Å aufgetragen.

diejenige eines Borosilicatglases Co_{14} (reine Borsäure wird von Kobaltoxyd nur schwach rosenrot gefärbt).

Um zu zeigen, wie sehr die bildliche Darstellung der Absorptionsspectren nach Beobachtung mit dem Vergleichsspectroskop von der Darstellung der Absorptionsgrössen abweicht, sind in vorstehender Fig. 1 die Curven der Absorptionsgrössen des Glases Co_5 und die bildliche Darstellung des Absorptionsspectrums des Kobaltglases nach H. W. Vogel¹⁾ in dasselbe Liniensystem eingezeichnet.

Chromgläser (Taf. IV).

Die Chromgläser wurden unter Zusatz von soviel chemisch reiner, in Wasser gelöster Chromsäure zum Glassatze abgeschmolzen, dass die fertigen Gläser 0,99 Proc. Cr_2O_3 enthielten, unter der Annahme, dass die Chromsäure im Glase vollständig zu Cr_2O_3 reducirt wird.²⁾

Die reinen Chromsilicatgläser Cr_1 , Cr_3 , Cr_6 und Cr_7 zeigen grosse Uebereinstimmung im Verlauf der Absorption im blauen Teile des Spectrums. Die aufsteigenden Aeste der Curven im Blau fallen bei den Gläsern Cr_1 und Cr_6 zusammen; ebenso diejenigen der Gläser Cr_3 und Cr_9 . Im roten Teile zeigen sich grössere Verschiedenheiten. Wegen der unten erwähnten Unsicherheit der Chromfärbung unterlasse ich, die übrigen Curven einzuzichnen.

Kupferoxydgläser (Taf. V).

Grosse Uebereinstimmung im Verlauf der Curven zeigen die Kupferoxydsilicatgläser. Ich zeichne in Taf. V den Ver-

1) l. c.

2) Diese Annahme wurde nur gemacht, um einen bestimmten Gehalt an Chrom der Rechnung zu Grunde zu legen; sie entspricht nicht vollständig den Thatsachen, wie schon von Linke und Adam (vgl. Eder und Valenta, l. c.) gezeigt worden war, die durch Verschmelzen eines Glases mit Cr_2O_3 weissgrüne, durch Verschmelzen mit K_2CrO_4 gelbgrüne Gläser erhalten hatten. Es scheint mir aber, dass in den von mir erschmolzenen Gläsern die Chromsäure *trotz der gelbgrünen Färbung* unter Sauerstoffabgabe grösstenteils reducirt wurde und dass die verschiedenen Färbungen der Chromgläser hauptsächlich auf verschiedenen färbenden Zustände des Chromoxydes selbst zurückzuführen sind. Für diese Ansicht sprechen die Ausscheidungen, welche sich in übersättigten Chromgläsern bei langsamem Erkalten bilden.

lauf der Absorptionsgrössen für Cu_1 , Cu_4 und Cu_7 und bemerke, dass Cu_3 mit Cu_7 nahezu vollkommen übereinstimmt.

Diese Gläser lassen auch in dickerer Schicht den blauen Teil des Spectrums nahezu ungeschwächt hindurchgehen, das Glas Cu_1 auch den violetten.

Stark abweichend ist die Absorption des Boraxglases Cu_6 ; noch mehr die des Borosilicatglases Cu_{13} .

Die gezeichneten Curven stellen die Absorptionsgrössen dar, wie sie sich aus der Messung eines Glases mit ca. 2 Proc. CuO ergeben. Vermehrt man in den blauen Silicatgläsern den Kupfergehalt auf das Drei- bis Fünffache, so erhält man grüne Gläser von ganz abweichender Absorption.

Nickelgläser (Taf. VI).

Eine viel grössere Mannigfaltigkeit als die bisher besprochenen Gläser zeigen die Nickelgläser in ihrer Färbung. Schon die Silicatgläser weisen untereinander beträchtliche Abweichungen der Absorption auf. Einigermassen übereinstimmend sind nur die Absorptionsgrössen der Natronsilicatgläser Ni_1 , Ni_2 , Ni_5 , deren Absorptionscurven nur wenig von der in Taf. VI eingezeichneten Curve Ni_3 abweichen.

Es ist bekannt, dass die mit Nickel gefärbten Natrongläser rotbraun oder rotviolett gefärbt sind, die Kaligläser dagegen violett. Dementsprechend ist der Verlauf der Absorptionscurven Ni_2 und Ni_4 ein anderer als der der Natrongläser. Die Curve von Ni_2 zeigt grosse Aehnlichkeit mit der des Kobaltsilicatglases, unterscheidet sich aber von dieser durch eine abweichende Lage der Maxima.

Der gänzlich abweichende Verlauf der Curven des braunen Nickelboraxglases Ni_9 und des gelben Glases Ni_{12} verdient Beachtung.

In Taf. VI ist noch die Curve des schweren Bleisilicatglases Ni_{15} eingezeichnet.

Mangangläser (Taf. VII).

Die Färbungen, welche den Gläsern durch Manganverbindungen erteilt werden, sind deshalb von Wichtigkeit, weil Manganhyperoxyd in Form von Braunstein schon seit langem zur Entfärbung des grünstichigen Glases Verwendung findet.

Wird reiner Braunstein dem farblosen Glasfluss zugesetzt, so färbt er Kaligläser violett, Natrongläser mehr rötlichviolett. Diese Färbungen sind bei mässiger Dicke Mischfarben aus allen Farben des Spectrums, von denen das Grün am meisten ausgelöscht wird, wie ein Blick auf die Curven von Taf. VII lehrt.

Es ist in der Glasindustrie bekannt, dass der Verwendung von Braunstein als Färbungs- wie auch als Entfärbungsmittel eine gewisse Unsicherheit anhaftet. Diese Unsicherheit ist nicht so sehr auf die dem Braunstein anhaftenden Verunreinigungen zurückzuführen, als vielmehr auf die Eigenschaft seiner Lösung, im Glasfluss durch Reduktionsmittel in farblose Manganoxydulverbindungen überzugehen. Reduktionsmittel finden sich aber in vielen Glassätzen, auch wirkt in offenen Häfen die Flamme häufig reducierend.

Um eine derartige Reduction möglichst zu verhindern, wurden meine Glassätze mit Mangannitrat oder mit Mangansuperoxyd versetzt (in solcher Menge, dass auf 100 g Glas 1 g Mn_2O_3 kamen), und die Flamme beim Abschmelzen so regulirt, dass eine Reduktionswirkung derselben ausgeschlossen war.

Die Bedingungen waren also gegeben, dass die höchste beständige Oxydationsstufe entstehen konnte; trotzdem ging der grösste Teil des Mangansuperoxydes in Manganoxydulverbindungen über, die nicht oder nur sehr wenig gefärbt sind. Ich konnte das direct an Boratgläsern durch quantitative Bestimmung des beim Auflösen des Glases in kochender Salzsäure entweichenden Chlors feststellen (Methode Bunsen).

Jemehr in einem Glase die sauren Bestandteile gegenüber dem basischen vorwalten, um so mehr Sauerstoff verlieren die schon vorhandenen oder zunächst gebildeten höheren Oxydationsstufen des Mangans¹⁾; bei Gläsern von sehr saurer Zusammensetzung gehen die höheren Oxyde vollständig in Manganoxydul über, unter Abgabe des gesamten disponiblen Sauerstoffs.

Diese Sauerstoffabgabe tritt ein, gleichgültig, ob man dem Glassatze Mangannitrat oder Mangansuperoxyd zugesetzt hat.

Bei Gläsern mit mässigem Alkaligehalt (wie bei Borax) wird zwar der grösste Teil des verfügbaren Sauerstoffs (90 bis

1) Dieser Satz wurde nur für Boratgläser durch Analyse festgestellt. Es kommt ausser dem Säuregehalt auch noch die qualitative Zusammensetzung des Glases als mitbestimmend in Betracht.

95 Proc. desselben) abgegeben ¹⁾, aber ein kleiner Rest desselben bleibt an das Manganoxydul oder einem Teil desselben chemisch gebunden im Glase. Solche Gläser sind mehr oder weniger intensiv gefärbt.

Welche Oxydationsstufe des Mangans die Färbung des Glases bedingt, konnte bisher nicht festgestellt werden; es kann das Hyperoxyd MnO_2 sein oder auch eines der Oxyde Mn_2O_3 , Mn_3O_4 oder ein anderes noch nicht bekanntes Oxyd des Mangans. Die Möglichkeiten sind zu mannigfach, als dass sie der Erforschung zugänglich wären.

Von Wichtigkeit erscheint aber der Umstand, dass das dem Glase zugesetzte MnO_2 von ersterem zum grössten Teile als ungefärbtes MnO aufgenommen wird, dass also die Färbekraft der zugesetzten Manganverbindung nicht in vollem Maasse zur Geltung kommt. Dieser Umstand erklärt zum Teil die eingangs erwähnten Unsicherheiten der Manganfärbung; die Betrachtung des Verlaufes der Curven lässt vermuten, dass zwei verschiedene färbende Manganverbindungen im Glase bestehen, von denen die eine vorwiegend in Natrongläsern, die andere vorwiegend in Kaligläsern enthalten ist.

In Taf. VII sind nur einige der gemessenen Curven eingezeichnet; die Curve von Mn_5 stimmt beinahe vollkommen mit der eingezeichneten von Mn_3 überein. Mn_7 verläuft ähnlich der Curve Mn_3 liegt aber etwas tiefer. Ebenso erinnert der Verlauf der Curve von Mn_6 , an den von Mn_4 ; die Absorptionsgrössen des ersteren Glases sind aber ungefähr halb so gross, als die des letzteren.

Wir bemerken also, wenn wir von den beiden Wassergläsern Mn_1 und Mn_2 absehen, eine Uebereinstimmung der Lichtabsorption durch die Kaligläser Mn_4 und Mn_6 einerseits und davon abweichend eine Uebereinstimmung der Absorption der Natrongläser Mn_3 , Mn_5 und Mn_7 andererseits.

Eisenoxydgläser (Taf. VIII).

Ausserordentlich mannigfaltig sind die Färbungen, welche man durch Eisenoxyd in verschiedenen Gläsern hervorrufen

1) Ich habe den zum Zwecke der Analyse hergestellten Boratgläsern meist Mangansuperoxyd (MnO_2) vor dem Abschmelzen zugesetzt. Als verfügbaren Sauerstoff bezeichnet man den Sauerstoff, welcher von einem höheren Manganoxycle bei Behandlung mit Säuren unter Bildung von MnO abgegeben wird. Hier z. B. $\text{MnO}_3 = \text{MnO} + \text{O}$ oder $\text{Mn}_2\text{O}_3 = 2\text{MnO} + \text{O}$.

kann. Die drei Oxyde: Eisenoxyd, Eisenoxydul und Eisenoxyduloxyd können sowohl einzeln, als nebeneinander in ungebun-

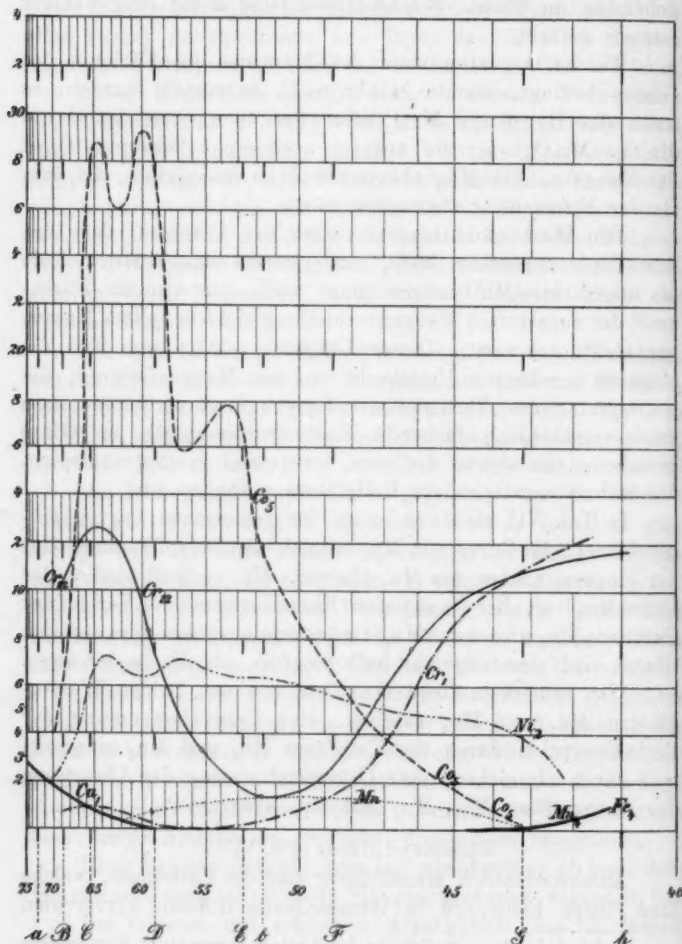


Fig. 2.

denem Zustande als auch in Verbindung mit Kieselsäure oder Borsäure vorhanden sein, sowie endlich als Doppelsalz, teil-

weise an Alkalien gebunden; dazu kommt noch, dass es nicht schwer fällt, das Eisen als Metall im Glas gelöst zu erhalten.

Jeder Verbindung des Eisens wird aber mindestens eine bestimmte Farbe zukommen. Es lassen sich daher durch Eisen in ein und demselben Glassatze die verschiedenartigsten Färbungen hervorrufen: man kann gelbe, gelbgrüne, grüne oder blaugrüne Farben erhalten. Es wird darum keinen Zweck haben, die zahlreichen, gemessenen und durcheinanderlaufenden Curven die grösstenteils Zufallsresultate darstellen, hier einzuzichnen und ich gebe nur als Beispiel in Taf. VIII die Absorptionsgrössen des gelbgrünen Glases Fe_3 , ferner die eines ähnlich zusammengesetzten Natron-Kalk-Silicatglases 1072 (mit 2 Proc. Fe_2O_3) und die desselben Glases, nachdem dem geschmolzenen Glase 1 Proc. MnO_2 eingeührt worden war, zum Zweck der Entfärbung¹⁾ (Curve 1075).

Man kann an den Curven der beiden letzterwähnten Gläser erkennen, dass der gelöste Braunstein nicht bloss als Complementärfarbe (die Absorption im Blaugrün verstärkend) wirkt, sondern auch die Absorption im roten Teile des Spectrums herabsetzt, eine Wirkung, die vermutlich auf eine Oxydation etwa vorhandenen Eisenoxyduls zurückzuführen ist.

Zum Schlusse möchte ich noch auf die grossen Verschiedenheiten in der färbenden Kraft der einzelnen Oxyde aufmerksam machen. Um einen Vergleich derselben zu ermöglichen, habe ich in Fig. 2 die Absorptionsgrössen A der Gläser Co_8 , Cr_{13} , Ni_2 , Cu_1 , Mn_4 und Fe_4 in gleichem Maassstabe in ein Liniensystem eingetragen.

Man kann durch Betrachtung der Curven leicht ersehen, dass bei Anwesenheit gleicher Mengen von färbenden Oxyden in der Volumeneinheit Glassubstanz das Kobaltoxyd weitaus kräftiger färbend wirkt, als die anderen Oxyde, und dass dem Eisenoxyd ein sehr geringes Färbevermögen zukommt, ein Umstand, der, bei der weiten Verbreitung dieses Körpers zu der Natur, für die Glasindustrie von höchster Wichtigkeit ist.

Jena, im October 1900.

1) Diese beiden Gläser waren schon früher von Hrn. Grieshammer hergestellt worden.

(Eingegangen 27. October 1900.)

**4. Ueber das Decrement elektrischer
Schwingungen bei der Ladung von Condensatoren;
von A. F. Sundell und Hj. Tallqvist.**

1. Bei mehreren physikalischen Untersuchungen über gedämpfte Schwingungen sind die experimentell erhaltenen Werte der Schwingungszeit in Einklang mit der Theorie des Vorganges, während nur eine rohe oder gar keine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in Bezug auf das Decrement der Schwingungen vorhanden ist. Die nachfolgende Untersuchung über die elektrischen Oscillationen bei der Ladung eines Condensators, welche als eine Fortsetzung einer früher veröffentlichten Untersuchung über dasselbe Thema¹⁾ zu betrachten ist, gewährt ein Beispiel, wo auch das experimentell erhaltene Decrement genau mit dem theoretisch zu ermittelnden Decrementes stimmt, nachdem alle erforderlichen Correctionen angebracht sind, wie unten näher gezeigt wird. Im Gegensatz zu früheren Behauptungen²⁾ ist es deshalb auch möglich von der Decrementsbestimmung der Ladungsschwingungen Nutzen für besondere Zwecke zu ziehen, z. B. für die Messung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten.

Die im Folgenden dargestellten Methoden zur Berechnung des Decrementes bei einer einzelnen Ladungscurve sind von Sundell ausgearbeitet. Das experimentelle Material wurde 1896 im physikalischen Laboratorium des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich von Tallqvist gesammelt, nach einer in dem oben erwähnten Aufsätze näher beschriebenen Methode. Die Bearbeitung des Materiales und die ferneren Anwendungen der neuen Methoden zur Decrementsberechnung wurden von Tallqvist gemacht. Ausführlichere Angaben als in diesem Aufsätze findet man in einigen in den „Acta der

1) Hj. Tallqvist, Wied. Ann. 60. p. 248. 1897.

2) Vgl. U. Seiler, Wied. Ann. 61. p. 47. 1897.

finnländischen Gesellschaft der Wissenschaften“ enthaltenen Abhandlungen.¹⁾

Methoden der Decrementsberechnung.

2. Wenn die beiden Belegungen eines Condensators von der Capacität C plötzlich durch eine Leitung verbunden werden, deren Widerstand W ist und die eine Batterie von der elektromotorischen Kraft E sowie eine Inductionsspule vom Selbstpotential L enthält, so genügt bekanntlich die während der Ladung des Condensators stattfindende veränderliche Potentialdifferenz p seiner Belegungen der Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{LC} = \frac{E}{LC}.$$

Für die augenblickliche Stromstärke i hat man den Ausdruck

$$(2) \quad i = C \frac{dp}{dt}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) setzen ein constantes C voraus.

Weil das Isolationsvermögen der isolirenden Schichten der Inductionsspule nie absolut vollkommen ist, und eine kleine Leitfähigkeit dieser Schichten wegen der in der Spule vorhandenen und schnell wechselnden Spannungsdifferenzen einen merkbaren Einfluss auf das Decrement der Ladungsschwingungen ausübt, um so mehr, je kleiner der Widerstand des Stromkreises ist, so muss die Gleichung (1) noch vervollständigt werden. Einen ähnlichen Einfluss kann eine Leitfähigkeit des Dielektricum des Condensators ausüben. Indem man den Stromkreis als gespaltet betrachtet, erhält man statt (1) die Differentialgleichung²⁾

$$(3) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \left\{ \frac{W}{L} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{p}{LC} = \frac{E}{LC},$$

worin R und r bez. die Widerstände des Condensators und der isolirenden Schichten der Inductionsspule bezeichnen und

1) A. F. Sundell, Acta Soc. Scient. Fenn. 24. Nr. 11. 1899; Hj. Tallqvist, Acta Soc. Scient. Fenn. (I) 23. Nr. 4. 1897; (III) 26. Nr. 3. 1899.

2) Hj. Tallqvist, l. c. (I) p. 32.

sehr gross im Verhältniss zu W anzunehmen sind. Die Gleichung (3), welche für eine constante Capacität gilt, bekommt dieselbe Form wie die Gleichung (1), indem man W mit

$$W' = W + \frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

ersetzt.

Es soll jetzt die Capacität C als veränderlich angesehen werden. In der Gleichung (2) kommt dann ein Glied hinzu. Die in der Zeit dt dem Condensator zugeführte totale Elektrizitätsmenge $i dt$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen: $C dp$, welcher Teil der Veränderung der Potentialdifferenz p um dp bei constant gehaltener Capacität entspricht, und $p dC$, welcher Teil schon erforderlich ist, um die Potentialdifferenz p constant zu erhalten, während die Capacität C um dC wächst. Somit folgt

$$(4) \quad i = C \frac{dp}{dt} + p \frac{dC}{dt} = \frac{d(Cp)}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

worin q die augenblickliche Ladung des Condensators bezeichnet.

Ausser dieser Gleichung (4) ergibt sich eine Energiegleichung. In der Zeit dt verausgabt die Batterie die Energiemenge $E i dt$, welche folgendermaassen angewandt wird:

- a) zur Erwärmung der Leitung der Betrag $W i^2 dt$;
- b) zur Vermehrung der elektrodynamischen Energie des Stromkreises der Betrag $L i di = d\{\frac{1}{2} L i^2\}$;
- c) zur Vermehrung der potentiellen Energie des Condensators. Bei constant gehaltener Capacität entspricht dem Zuwachse von p um dp die Energiemenge $q dp = C p dp$, und bei unveränderten Potentialen der Belegungen nimmt die Energie durch das Wachsen von C um dC mit $\frac{1}{2} p^2 dC$ zu, sodass der ganze Zuwachs ist

$$C p dp + \frac{1}{2} p^2 dC = d\{\frac{1}{2} C p^2\}.$$

- d) Zu den jetzt genannten Energiemengen kommt noch ein Glied hinzu, welches die mechanische Arbeit angiebt, welche bei der Vermehrung der Capacität des Condensators verrichtet wird. Hätte man z. B. einen Luftcondensator mit einer festen Platte von der Fläche F und im Abstände D einer gleich grossen beweglichen Platte, welche sich in der Zeit dt der

festen Platte um $-dD$ nähert, beim Erheben eines der gegenseitigen Anziehung der Platten gleichen Gewichtes

$$mg = \frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2},$$

wo A das Verhältnis der elektrostatischen und der elektromagnetischen Einheit der Elektrizität ist, so wird hierbei verrichtet die Arbeit

$$-mgdD = -\frac{Fp^2}{8\pi A^2 D^2} dD = \frac{1}{2}p^2 d\frac{F}{4\pi A^2 D} = \frac{1}{2}p^2 dC,$$

welche auch der Batterie entzogen werden muss.

In einem Condensator mit festem Dielectricum muss man sich die entsprechende Arbeit in irgend einer Weise zur Vermehrung der dielektrischen Polarisation angewandt denken.

Für die Energiegleichung bekommt man jetzt

$$(5) \quad \begin{cases} Ei = Wi^2 + Cp \frac{dp}{dt} + \frac{1}{2}p^2 \frac{dC}{dt} + \frac{1}{2}p^2 \frac{dC}{dt} + Li \frac{di}{dt} \\ = Wi^2 + pi + Li \frac{di}{dt} \text{ [laut Gleichung (4)].} \end{cases}$$

Nach Division mit i folgt hieraus die Gleichung

$$(6) \quad E = Wi + p + L \frac{di}{dt},$$

welche für den Fall einer unveränderlichen Capacität sehr bekannt ist.

Durch Elimination von i zwischen (4) und (6) erhält man als Differentialgleichung des Ladungsvorganges

$$(7) \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{W}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{E}{L},$$

oder auch

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d^2p}{dt^2} = \left\{ \frac{W}{L} + \frac{2}{C} \frac{dC}{dt} \right\} \frac{dp}{dt} \\ + \left\{ \frac{1}{LC} + \frac{W}{L} \frac{1}{C} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{C} \frac{d^2C}{dt^2} \right\} p = \frac{E}{LC}, \end{cases}$$

welche beiden Gleichungen lineare Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten darstellen.

3. Wir behandeln einen einfachen Specialfall, indem wir annehmen, dass die Capacität sich gleichförmig mit der Zeit ändert, und somit

$$(9) \quad C = C_0 + h t$$

setzen. Die Gleichung (8) giebt dann

$$(10) \quad \frac{d^2 p}{dt^2} + \left\{ \frac{W}{L} + \frac{2h}{C} \right\} \frac{dp}{dt} + \frac{1+Wh}{LC} p = \frac{E}{LC},$$

eine lineare Differentialgleichung, wo die Coefficienten immer noch veränderlich sind, weil C von der Zeit abhängt. Für unseren Zweck genügt es jedoch einen constanten mittleren Wert C_m für C einzuführen, da wir diese Gleichung nur auf eine sehr kurze Zeit (zwei oder drei Halbooscillationen) anwenden werden. Unter solchen Verhältnissen stellt die Gleichung (10) eine regelmässig gedämpfte Schwingung dar. Das allgemeine Integral ist:

$$p = \frac{E}{1+Wh} + e^{-\left(\frac{W}{2L} + \frac{h}{C_m}\right)t} \{A \cos \beta t + B \sin \beta t\},$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1+Wh}{LC_m} - \frac{1}{4}\left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC_m} - \left(\frac{W}{2L}\right)^2 - \left(\frac{h}{C_m}\right)^2}, \end{aligned}$$

wo T die Schwingungszeit ist. Ferner hat man das logarithmische Decrement

$$\alpha = \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m}\right) \frac{\pi}{2\beta}.$$

In β können die Glieder

$$\left(\frac{W}{2L}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{h}{C_m}\right)^2,$$

die von derselben Ordnung sind, im Vergleich mit $1/LC_m$ vernachlässigt werden. Somit hat h keinen Einfluss auf die Schwingungszeit und für das Decrement ergibt sich

$$(11) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \left(\frac{W}{L} + \frac{2h}{C_m}\right) \sqrt{LC_m} = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}}.$$

Durch eine gleichförmige Veränderung der Capacität wird somit das logarithmische Decrement um

$$\pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = \frac{h T}{2 C_m}$$

vergrössert (oder verkleinert).

Es werde die Grösse α „augenblickliches Decrement“, die Grösse $h = e^{\alpha}$ „augenblickliches Dämpfungsverhältnis“ genannt.

4. Da bei langsam erfolgender Veränderung der Capacität die Schwingung für eine kurze Zeit als regelmässig gedämpft angesehen werden kann, erhält man den mittleren Wert Q der „normalen Ladung“, um welche die Ladung hin und her oscillirt, aus drei aufeinander folgenden Ladungsextremen M_{n-1} , M_n , M_{n+1} , durch die Gleichung

$$(12) \quad Q_n = \frac{M_{n-1} M_{n+1} - M_n^2}{M_{n-1} + M_{n+1} - 2 M_n} = M_{n-1} - \frac{(M_{n-1} - M_n)^2}{(M_{n-1} - M_n) + (M_{n+1} - M_n)}.$$

Der Veränderung von Q , wie sie diese Reihe zeigt, ist die Veränderung von C proportional. Somit wird eine Schätzung von h möglich mittels der Formel

$$(13) \quad h = \frac{C'' - C'}{t'' - t'} \quad \text{oder} \quad \frac{h}{C_m} = \frac{C'' - C'}{C_m (t'' - t')} = \frac{Q'' - Q'}{Q_m (t'' - t')},$$

wo C' , C'' , Q' , Q'' die Werte von C und Q am Anfange und am Ende des betrachteten Zeitintervalles, C_m , Q_m dagegen die mittleren Werte sind. Folglich ist auch das Decrement wegen des Einflusses von h corrigirbar.

5. Es soll hier die Decrementberechnung in extenso für eine Curve gegeben werden, deren Daten sind:

$$C = 1,0119 \text{ Mikrof.}$$

$$L = 0,5933 \text{ Henry,}$$

$$W = 3,191 \text{ Ohm.}$$

Der Condensator war ein vorzüglicher Glimmercondensator, welcher im Laboratorium als Normalinstrument benutzt wurde. Die Ladungsextreme der Curve sind in Scalenteilen angegeben:

Nr.	Minima	Diff.	Nr.	Maxima	Diff.
0	0				
2	22,98	22,98	1	442,37	23,15
4	43,05	20,07	3	419,22	14,75
6	61,70	18,65	5	404,46	15,71
8	77,96	16,26	7	388,75	14,93
10	92,84	14,88	9	373,82	12,75
12	105,80	12,96	11	361,07	12,72
14	118,68	12,88	13	348,35	10,47
16	129,36	10,68	15	337,88	9,20
18	139,28	9,92	17	328,68	9,68
20	148,36	9,08	19	319,00	

Die Differenzen zeigen, dass wenigstens das zweite Maximum einen bedeutenden zufälligen Fehler hat. Man könnte diesem Umstande abhelfen und ein ein klein wenig genaueres Resultat erzielen, indem man statt der beobachteten Ladungsextreme mittels graphischer Interpolation verbesserte Ladungsextreme benutzen würde. Am besten wendet man das graphische Ausgleichungsverfahren an auf die Unterschiede der beobachteten Minima und der Ordinaten einer angemessen gewählten Parabel sowie auf die Unterschiede der beobachteten Maxima und der Ordinaten einer zweiten Parabel, was bei einiger Uebung wenig Zeit in Anspruch nimmt. Jedoch sollen jetzt die auf die obige Curve sich beziehenden Rechnungen mit den ursprünglichen Werten ausgeführt werden. Die in den Art. 12 bis 17 enthaltenen Resultate sind dagegen sämtlich auf verbesserte Werte der Ladungsextreme gegründet.

Die folgende Tab. I enthält in der Columnne „ Q beobachtet“ die nach der Formel (12) berechneten Werte Q , in der Columnne „ Q verbessert“ die aus den Werten „ Q beobachtet“ durch graphische Ausgleichung gewonnenen Werte, welche wir zur Ermittlung von h verwenden werden.

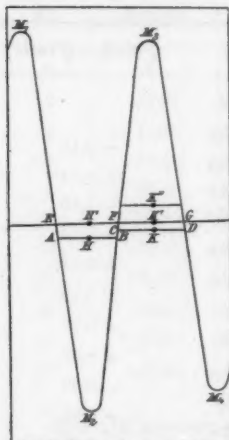
Tabelle I.

Nr.	Q beobachtet		Q verbessert		Q beob. — Q verb.
		Diff.		Diff.	
0	—	—	226,48	+0,50	—
1	227,08	—	226,98	0,45	+ 0,10
2	[226,72]	- 0,36	227,43	0,41	- 0,71
3	[226,24]	- 0,48	227,84	0,38	- 1,60
4	[227,38]	+ 1,14	228,22	0,35	- 0,84
5	228,54	+ 1,16	228,57	0,33	- 0,03
6	229,06	+ 0,52	228,90	0,32	+ 0,16
7	229,39	+ 0,33	229,22	0,30	+ 0,17
8	229,58	+ 0,14	229,52	0,28	+ 0,01
9	229,71	+ 0,18	229,80	0,26	- 0,09
10	230,07	+ 0,36	230,06	0,24	+ 0,01
11	230,28	+ 0,21	230,30	0,22	- 0,02
12	230,17	- 0,11	230,52	0,19	- 0,35
13	230,38	+ 0,21	230,71	0,17	- 0,33
14	230,84	+ 0,46	230,88	0,16	- 0,04
15	231,02	+ 0,18	231,04	0,15	- 0,02
16	231,27	+ 0,25	231,19	0,15	+ 0,08
17	231,56	+ 0,29	231,34	0,14	+ 0,22
18	231,50	- 0,06	231,48	0,14	+ 0,02
19	231,47	- 0,03	231,60	0,12	- 0,13
20			231,71	0,11	—

Die beobachteten Q sind überhaupt mit der Zeit wachsend. Der zweite, dritte und vierte Wert sind wegen des fehlerhaften zweiten Maximums stark abweichend und wurden bei der Interpolation nicht benutzt.

6. Für die Berechnung des Dämpfungsverhältnisses sind drei Ladungsextreme unzureichend. Denn bezeichnet man die Ladungen in den Punkten E , F , G (vgl. nachstehende Figur), in welchen die Curve für die normale Ladung die Schwingungscurve schneidet, mit Q_1 , Q_2 , Q_3 , die nach (12) berechnete normale Ladung in H mit Q , so erhält man aus

den drei Ladungsextremen M_1, M_2, M_3 bei constanter Capacität (die Ladungen in A und $B = Q$) das Dämpfungsverhältnis



$$k' = \frac{M_1 - Q}{Q - M_2} = \frac{Q - M_2}{M_3 - Q}$$

oder

$$(14) \quad k' = \frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_2},$$

für die Dämpfungsverhältnisse der drei successiven Halboscillationen dagegen aus den vier successiven Ladungsextremen M_1, M_2, M_3, M_4 die Werte

$$k_1 = \frac{M_1 - Q_1}{Q_1 - M_2}, \quad k_2 = \frac{Q_2 - M_2}{M_3 - Q_2},$$

$$k_3 = \frac{M_2 - Q_3}{Q_3 - M_4}.$$

Wenn nun H gerade auf der Curve EFG in H' liegen würde, so erhielte man offenbar mit der Formel (14) einen im Verhältnis zur normalen Ladung in H' etwas zu kleinen Wert, da die Drehung von EF um H' in eine mit AB parallele Lage k_1 und k_2 (oder eigentlich ihre Logarithmen) um ungefähr gleich viel verkleinert. Dagegen wäre der für K aus M_2, M_3 und M_4 berechnete Wert

$$k'' = \frac{M_2 - M_3}{M_3 - M_4},$$

auch wenn K auf der Curve EFG in K' läge, ungefähr gleich viel zu gross gegen die normale Ladung in K , da die Drehung von FG um K' parallel CD k_2 und k_3 vergrössert. Man nimmt daher an für die normale Ladung Q_2 in F das Dämpfungsverhältnis $k = \sqrt{k'k''}$, oder

$$(15) \quad k = \sqrt{\frac{M_1 - M_2}{M_3 - M_4}}.$$

Hierbei werden die Fehler in k wegen der Abweichungen HH' und KK' nicht eliminirt. Sie heben sich nur teilweise auf, wenn H und K nach derselben Seite von EFG liegen, summiren sich aber, wenn diese Punkte nach entgegengesetzten Seiten (wie H und K'') liegen.¹⁾

1) Die Formel (15) liefert einen ziemlich richtigen Wert, nur wenn k nicht viel von der Einheit abweicht. Die k werden abwechselnd zu

Statt von α oder h bedient man sich für die logarithmische Rechnung am bequemsten des Decrementes

$$\gamma = \log \text{vulg } k = \alpha \log \text{vulg } e = M \alpha = 0,43429 \alpha.$$

Um das „augenblickliche“ Decrement (γ beobachtet in der Tab. II)

$$(16) \quad \gamma_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{M_{n-1} - M_n}{M_{n+1} - M_{n+2}}$$

auf das „definitive“ Decrement zu reduciren, womit der Grenzwert von γ für $h = 0$ und C_m gleich der vollen Capacität C , d. h. die Grösse

$$(17) \quad M \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C}{L}}$$

verstanden ist, sind zwei Reductionen erforderlich, nämlich:

1. Für das Ansteigen der Capacität die Reduction

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 \gamma &= -M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = -M \frac{h}{2} \frac{T}{C_m} \\ &= -M \frac{T}{2 C_m} \frac{C_{n+1} - C_n}{\frac{1}{2} T} = -M \frac{Q_{n+1} - Q_n}{\frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})}, \end{aligned} \right.$$

wobei h nach der Formel (13) derjenigen Halbosillation entnommen ist, für deren Mitte der Wert von γ gilt. Q_n und Q_{n+1} sind zwei successive Werte aus der Columnne „ Q verbessert“ in der Tab. I.

2. Auf die volle Capacität 1,0119 Mikrof. und die entsprechende normale Ladung 231,98, welche die „definitive Ladung“ des Condensators ist, die Reduction

$$(19) \quad \Delta_2 \gamma = \frac{\pi}{4} W M \sqrt{\frac{C_m}{L}} \frac{C - C_m}{C_m} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\Delta C}{C_m} = \frac{1}{2} \gamma \frac{\Delta Q}{\frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})},$$

wobei $\Delta Q = 231,98 - \frac{1}{2} (Q_n + Q_{n+1})$ ist; den Wert von γ in der Formel (19) genügt es, angenähert anzusetzen.

Die Tab. II enthält die für γ berechneten Werte und braucht wohl keiner näheren Erklärung.

gross und zu klein, aber diese Variation beträgt in unserem Falle nur etwa 3 Einheiten der letzten Decimale und wird somit gänzlich durch die Beobachtungsfehler gedeckt.

Tabelle II.

$\pm (M_n - M_{n-1})$	log vulg $\pm (M_n - M_{n-1})$	γ beobachtet	$A_1 \gamma$	$A_2 \gamma$	γ reducirt
$M_1 - M_0$	2,64579	—	—	—	—
$M_1 - M_2$	2,62262	[0,02392]	-86	+22	[0,02328]
$M_2 - M_1$	[2,59795]	[0,02362]	78	20	[0,02304]
$M_3 - M_2$	[2,57538]	[0,01997]	73	18	[0,01942]
$M_3 - M_4$	2,55800	[0,02020]	66	16	[0,01970]
$M_5 - M_3$	2,53496	0,02169	63	15	0,02121
$M_7 - M_5$	2,51461	0,02126	61	13	0,02078
$M_7 - M_8$	2,49247	0,02177	57	12	0,02132
$M_9 - M_8$	2,47108	0,02189	53	10	0,02146
$M_9 - M_{10}$	2,44868	0,02129	49	9	0,02089
$M_{11} - M_{10}$	2,42851	0,02084	45	8	0,02047
$M_{11} - M_{12}$	2,40700	0,02185	41	7	0,02151
$M_{13} - M_{12}$	2,38480	0,02295	36	6	0,02265
$M_{13} - M_{14}$	2,36110	0,02198	32	5	0,02171
$M_{15} - M_{14}$	2,34084	0,02098	30	5	0,02073
$M_{15} - M_{16}$	2,31915	0,02064	28	4	0,02040
$M_{17} - M_{16}$	2,29955	0,02089	28	3	0,02064
$M_{17} - M_{18}$	2,27738	0,02247	26	3	0,02224
$M_{19} - M_{18}$	2,25460	0,02265	23	2	0,02244
$M_{19} - M_{20}$	2,23208	—	—	—	—

Die eingeklammerten Zahlen hängen von dem zweiten Maximum ab.

Die reducirten Werte von γ wechseln ziemlich stark (zwischen 0,02040 und 0,02265, wenn die vier ersten nicht berücksichtigt werden). Die Variation wird wohl durch die Beobachtungsfehler verursacht, für welche das Dämpfungsverhältnis sehr empfindlich ist.

7. Für die Berechnung des definitiven Decrementes genügt es nicht, das arithmetische Mittel sämtlicher Werte „ γ reducirt“ zu nehmen, da in diesem nur die drei ersten und die drei letzten Extreme einwirken. Bildet man aber weitere Summen bei jedesmaligem Ausschliessen eines Wertes vom Anfange, und eines Wertes vom Ende der vorhergehenden Reihe, so bekommt man ungefähr gleich genaue Multipl. des Decrementes, aus welchen ein Endresultat zu ziehen ist.¹⁾

1) In diesen Summen heben sich auch die p. 80 in der Note erwähnten Variationen der γ im allgemeinen auf.

Am bequemsten führt man die Rechnung in einer compendiösen, in der Tab. III veranschaulichten Weise aus. Die $\log \pm (M_n - M_{n-1})$ werden so aufgeschrieben: der letzte unter den ersten, der vorletzte unter den zweiten etc., und die Differenzen werden gebildet. Von zwei successiven Differenzen nimmt man das Mittel, an welches die entsprechende Summe der Reductionen $A_1\gamma + A_2\gamma$ anzubringen ist, nämlich an das erste Mittel die Summe sämtlicher Reductionen, an das zweite die Summe aller Reductionen mit Ausnahme der ersten und der letzten etc. Die so erhaltenen Zahlen sind identisch mit den oben erwähnten Summen der γ -Werte und enthalten das reducirte Decrement 18, 16, 14 . . . 4, 2 mal.

Tabelle III.

	$\log \pm (M_n - M_{n-1})$	Differenz	Mittel	Reduction $= \Sigma(A_1\gamma + A_2\gamma)$	Multipl von γ	γ
$M_1 - M_0$	2,64579	0,41371	0,39086	- 697	0,38389 = 18 γ	0,02133
$M_{10} - M_9$	2,23208					
$M_1 - M_2$	2,62262	0,36802	[0,34430]	- 612	[0,33818] = 16 γ	[0,02114]
$M_{10} - M_9$	2,25460					
$M_1 - M_3$	[2,59795]	[0,32057]	[0,29820]	- 531	[0,29289] = 14 γ	[0,02092]
$M_{10} - M_9$	2,27738					
$M_1 - M_4$	[2,57538]	[0,27583]	[0,25734]	- 451	[0,25283] = 12 γ	[0,02107]
$M_{10} - M_9$	2,29955					
$M_1 - M_5$	2,55800	0,23885	0,21650	- 377	0,21273 = 10 γ	0,02127
$M_{10} - M_9$	2,31915					
$M_1 - M_6$	2,53499	0,19415	0,17383	- 304	0,17079 = 8 γ	0,02135
$M_{10} - M_{11}$	2,34084					
$M_1 - M_7$	2,51461	0,15351	0,13059	- 229	0,12830 = 6 γ	0,02138
$M_{10} - M_{11}$	2,36110					
$M_1 - M_8$	2,49247	0,10767	0,08587	- 154	0,08433 = 4 γ	0,02108
$M_{10} - M_{11}$	2,38480					
$M_1 - M_9$	2,47108	0,06408	0,04213	- 77	0,04136 = 2 γ	0,02068
$M_{10} - M_{11}$	2,40700					
$M_1 - M_{10}$	2,44868	0,02017				
$M_{10} - M_{10}$	2,42851					

Schliesst man die eingeklammerten Zahlen aus, so bekommt man

$$48 \gamma = 1,02140.$$

Man kann sagen, dass in dieser Summe ein Fehler in M_{20} einmal, in M_1 , M_9 , M_{11} und M_{19} dreimal, ein Fehler in M_{10} beinahe gar nicht, ein Fehler in den übrigen Ladungsextremen aber viermal wirkt. Begnügt man sich mit dieser Fehlerverteilung, wird als wahrscheinlichster Wert erhalten

$$\gamma = 0,02128 \pm 4,3,$$

$$k = 1,0502 \pm 1,0.$$

Von diesem Werte weichen die aus den Ladungsextremen berechneten γ teilweise stark ab (bis 137 Einheiten), wegen der Beobachtungsfehler. Der angegebene wahrscheinliche Fehler ist aus den oben angegebenen Specialwerten von γ berechnet, wobei die Multipelfactoren als zugehörige Gewichte angewandt wurden. Die Unsicherheit in den Werten von γ und k ist, wie ersichtlich, sehr klein.

8. Da die normale Ladung für jede Halbosillation durch die oben erwähnte Interpolation (Tab. I) bekannt ist, kann man k auch für jede Halbosillation aus zwei successiven Extremen berechnen. In der Tab. IV sind die so erhaltenen γ und die benutzten Werte von Q angeführt, ferner die Reductionen $A_1 \gamma$ und $A_2 \gamma$ (identisch mit den in der Tab. II enthaltenen Reductionen), sowie die reducirten γ . Von zwei successiven γ ist der mittlere Wert genommen („Mittel I“) und wieder der mittlere Wert von diesen Mitteln („Mittel II“). Diese letztgenannten Mittel hängen somit von vier successiven Extremen ab, wie die „ γ reducirt“ in Tab. II, und stimmen auch sehr nahe mit diesen überein.

Bildet man von den „reducirten γ “ in Tab. IV die Summen, wie oben für die reducirten γ in Tab. II beschrieben wurde, so bekommt man wieder Multipel von γ , in deren Summe die Fehler sämtlicher Extreme (mit Ausnahme des Minimums M_{10}) jeder einmal wirken. Mit Ausschliessung des Multipels 14γ , in welchem das zweite Maximum einwirkt, bekommt man

$$96 \gamma = 2,04294,$$

$$\gamma = 0,02128 \pm 4,3,$$

genau wie früher, was zu erwarten war. Von den beiden Rechnungsmethoden ist die erste vorzuziehen, da man keine Amplituden zu berechnen braucht und da das Schema nach Tab. III die Rechnung ausserordentlich erleichtert und beschleunigt.

Tabelle IV.

Q	γ beob.	$A_1 \gamma$	$A_2 \gamma$	γ reducirt	Mittel I	Mittel II
226,74	0,02182	-96	+24	0,02110	0,02155	—
227,31	0,02264	96	22	0,02200	0,02505	0,02330
227,64	[0,02869]	78	20	[0,02811]	0,02095	0,02300
228,03	[0,01435]	73	18	[0,01380]	0,01781	0,01938
228,40	0,02233	66	16	0,02133	0,02167	0,01974
228,74	0,02200	63	15	0,02152	0,02071	0,02119
229,06	0,02039	61	13	0,01991	0,02087	0,02079
229,37	0,02228	57	12	0,02133	0,02177	0,02132
229,66	0,02214	53	10	0,02171	0,02117	0,02147
229,93	0,02102	49	9	0,02062	0,02057	0,02087
230,18	0,02089	45	8	0,02052	0,02038	0,02048
230,41	0,02059	41	7	0,02025	0,02267	0,02153
230,62	0,02539	36	6	0,02509	0,02267	0,02267
230,80	0,02053	32	5	0,02026	0,02062	0,02165
230,96	0,02124	30	5	0,02099	0,02079	0,02071
231,12	0,02083	28	4	0,02059	0,01997	0,02038
231,27	0,01961	28	3	0,01936	0,02135	0,02066
231,41	0,02358	26	3	0,02335	0,02317	0,02226
231,54	0,02320	23	2	0,02299	0,02168	0,02242
231,66	0,02056	20	1	0,02037	—	—

9. Um den zeitlichen Verlauf der Capacität zu ermitteln, wurden Ladungscurven ohne Inductionsspule aufgenommen. Diese Curven zeigen einerseits, dass die Capacität eines guten Glimmercondensators ihren vollen Wert erst nach etwa zwei Sekunden erlangt, und andererseits, dass schon nach sehr kurzer Zeit der Unterschied der augenblicklichen Ladung von der maximalen nur wenige Zehntel Procent ist. Es ist daher sehr unwahrscheinlich, dass die normale Ladung z. B. bei

der Zeit des ersten Maximums nur 227,08 (Tab. I) sei oder mit 2,11 Proc. unter die definitive normale Ladung herabsinkt. Laut einer für die Daten $C = 1,0119$ Mikrof., $L = 0$, $W = 0,275$ Ohm ohne Spule aufgenommenen Curve würde man nach 2,5 m/sec. eine Ladung von etwa 99,44 Proc. erwarten. Es ist somit anzunehmen, dass die Capacität während der ersten Halbooscillation von einem unbekannten Anfangswerte nahe bis zu ihrer definitiven Grösse anwächst, infolge dessen das Dämpfungsverhältnis stark vergrössert werden muss. Hierdurch wird aber auch eine Versetzung der normalen Ladung von 227,08 etwas nach oben bedingt, damit die erste Amplitude gehörig vergrössert, die zweite verkleinert werde. Während der zweiten Halbooscillation sinkt die Capacität wieder herunter und das Dämpfungsverhältnis erscheint sehr erniedrigt, was auch die Verschiebung der normalen Ladung nach oben bewirkt, da die dritte Amplitude dadurch vergrössert wird. In dieser Weise steigt die Capacität während der ersten, dritten, fünften . . . Halbooscillation, und sinkt während der zweiten, vierten, sechsten . . . Halbooscillation. Die entsprechenden Variationen des Dämpfungsverhältnisses sind dadurch zu bewirken, dass man die Curve für die normale Ladung etwas höher zieht als die in der Tab. I interpolirte Curve, da die Gleichung (12) zu kleine Werte von Q liefert. Nimmt man nun vorläufig an, dass während zweier successiven Halbooscillationen das Steigen und das Sinken der Capacität gleichförmig und gleich stark sei, so ist nach der Gleichung (11) beim Steigen

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} + \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}},$$

beim Sinken

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} W \sqrt{\frac{C_m}{L}} - \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}}.$$

Die an γ_1 und γ_2 anzubringenden Reductionen sind somit:

$$\Delta \gamma_1 = - M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = - \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2},$$

$$\Delta \gamma_2 = + M \pi h \sqrt{\frac{L}{C_m}} = + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}.$$

Man berechnet nun $\pm \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ aus je zwei successiven Decrementen, setzt diese Zahlen graphisch aus und zieht eine Curve, aus welcher man die betreffende Reduction für jede Halbosscillation nehmen kann. Weiter hat man die beiden Reductionen $A_1\gamma$ und $A_2\gamma$ anzubringen, welche nach der neuen Curve der normalen Ladung zu berechnen sind. Aus den so erhaltenen γ zieht man den Mittelwert, wie früher bei der Tab. IV angeführt wurde. Wenn die neue Curve der normalen Ladung richtig getroffen ist, so muss das so erhaltene Decrement mit dem früher gefundenen stimmen. Bei der Versetzung der Ladungen Q nach oben ist darauf zu sehen, dass die Oscillationen der Capacität nicht zu stark werden, denn die Capacität darf nicht über ihren definitiven Wert wachsen.

Diese Rechnung ist für die betreffende Schwingungscurve ausgeführt worden, wobei jede Ladung Q der Tab. IV um ein Drittel des Unterschiedes gegen die definitive Ladung 231,98 aufwärts verschoben wurde. Nach der Reduction für die Oscillation der Capacität, die von 660 Einheiten für die erste bis zu 56 Einheiten für die letzte Halbosscillation herabsinkt, hat man noch zwei Drittel der Reductionen $A_1\gamma$ und $A_2\gamma$ der Tab. IV anzubringen. Als Resultat erhält man $\gamma = 0,02141 \pm 4,2$, was um 13 Einheiten von dem früher erhaltenen Werte abweicht. Man kann auch nicht ein besseres Uebereinstimmen erwarten, da die Gesetze für die Oscillationen der Capacität nicht bekannt sind, weshalb diese Rechnung nur als eine Näherung anzusehen ist.

10. Einen interessanten Vergleich der beiden Rechnungen mit den Beobachtungen erhält man folgenderweise. An die gefundenen Endwerte von γ werden sämtliche Reductionen rückwärts angebracht und das wahrscheinliche Decrement für jede Halbosscillation ermittelt. Mit diesen Decrementen werden dann die successiven Amplituden berechnet, wobei als erste Amplitude die erste normale Ladung benutzt wird. Aus den Amplituden gehen dann die Ladungsextreme hervor, welche mit den beobachteten Extremen zu vergleichen sind. In der Tab. V sind die zurückbleibenden Fehler angeführt, sowohl für die Rechnung ohne Annahme einer Oscillation der Capacität ($\gamma = 0,02128$), wie auch bei oscillirender Capacität ($\gamma = 0,02141$).

Tabelle V.

Fehler der Ladungsextreme. Beobachtung — Rechnung.

Ladungs- extreme	Ohne Oscillation der Capacität	Mit oscillirender Capacität	Ladungs- extreme	Ohne Oscillation der Capacität	Mit oscillirender Capacität
M_1	+0,09	-0,10	M_{11}	+0,34	+0,23
M_2	+0,26	+0,39	M_{12}	-0,62	-0,44
M_3	-3,28	-3,47	M_{13}	-0,45	-0,52
M_4	-0,05	+0,14	M_{14}	+0,17	+0,30
M_5	-0,18	-0,35	M_{15}	-0,09	-0,15
M_6	+0,26	+0,46	M_{16}	-0,08	0,00
M_7	+0,26	+0,10	M_{17}	+0,50	+0,45
M_8	-0,06	+0,14	M_{18}	-0,04	-0,01
M_9	-0,09	-0,23	M_{19}	-0,31	-0,37
M_{10}	-0,12	+0,08	M_{20}	+0,12	+0,05

Nur das zweite Maximum (M_3) weicht stark vom berechneten Werte ab. Alle übrigen Abweichungen stehen weit unter einem Scalenteile. Die Summe der Fehlerquadrate ist 1,38 in der Columnne ohne Oscillation und 1,57 in der Columnne mit Oscillation (beim Ausschliessen des zweiten Maximums).

11. Man erhält folgenderweise eine Formel, welche ermöglicht, den bei der Anwendung der Formel (15) in γ entstehenden Fehler zu schätzen.

Zuerst nimmt man an, dass die Capacität und damit die normale Ladung gleichförmig wächst. Laut der Formel (19) oben wächst dann auch das logarithmische Decrement gleichförmig mit der Capacität. Das geometrische Mittel zweier Dämpfungsverhältnisse, die gleich weit nach beiden Seiten von einer gewissen Capacität liegen, ist sehr nahe gleich dem zu dieser Capacität gehörenden Dämpfungsverhältnisse. Bezeichnet man die zu den successiven Halboscillationen gehörenden normalen Ladungen mit $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$ ¹⁾, so hat man, wenn man von der Ladung $Q_{p+\frac{1}{2}}$ nach beiden Seiten geht:

1) Um den Nenner 2 nicht überall gebrauchen zu müssen, sind die Indices von Q mit der Zahl $\frac{1}{2}$ grösser angesetzt als in Art. 4. Die Indices von k und M stimmen mit der früheren Bezeichnung überein.

$$\begin{aligned}
 k_p^2 &= \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p} \frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}}, \\
 &= \frac{Q_{p-1} - M_{p-2}}{M_{p-1} - Q_{p-1}} \frac{M_{p+1} - Q_{p+2}}{Q_{p+1} - M_{p+2}}, \\
 &= \frac{M_{p-2} - Q_{p-3}}{Q_{p-2} - M_{p-3}} \frac{Q_{p+2} - M_{p+3}}{M_{p+2} - Q_{p+3}}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 &= \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+1} - M_{p-q+2}} \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-2}}, \\
 &= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}.
 \end{aligned}$$

Durch Multiplication sämtlicher Werte erfolgt:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} k_p^{2q} &= \frac{Q_{p-q+1} - M_{p-q}}{M_{p-q+1} - Q_{p-q+1}} \frac{M_{p-q+1} - Q_{p-q+2}}{Q_{p-q+1} - M_{p-q+2}} \dots \frac{M_{p-1} - Q_p}{Q_p - M_p}, \\ &\frac{Q_{p+1} - M_p}{M_{p+1} - Q_{p+1}} \dots \frac{Q_{p+q-1} - M_{p+q-2}}{M_{p+q-1} - Q_{p+q-2}} \frac{M_{p+q-1} - Q_{p+q}}{Q_{p+q} - M_{p+q}}. \end{aligned} \right.$$

Mittels logarithmischer Differentiation berechnet man hieraus bis auf kleine Grössen höherer Ordnung genau denjenigen Fehler $\Delta \alpha_p$, der in α_p entsteht, wenn man die Ladungen Q im zweiten, dritten . . . letzten Zähler zur Gleichheit mit Q im ersten, zweiten . . . vorletzten Nenner abändert, sowie Q_{p-q+1} im ersten Zähler und Q_{p+q} im letzten Nenner mit $Q_{p+1/2}$ ersetzt. Man erhält:

$$(21) \quad 2q \Delta \alpha_p = \pm \left\{ \frac{1 + k^{2q-1}}{1 + k} \frac{k}{A_{p-q}} + (q - \frac{1}{2}) \frac{A_{p-q} + A_{p+q}}{A_{p-q} A_{p+q}} \right\} g,$$

$q = 1, 2, 3 \dots$

wo A die Amplituden sind, g die Zunahme von Q während einer Halbooscillation bedeutet, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $p - q$ und $p + q$ die Indices zweier Minima (beide gerade) oder die Indices zweier Maxima (beide ungerade) sind.

Wendet man jetzt die Formel (21) zur Fehlerschätzung bei der Formel (15) an, so erhält man z. B. für die drei ersten nach der Tab. V corrigierten Extreme $M_0 (= 0)$, M_1 , M_2 , wobei also $p = q = 1$ ist,

$$\Delta \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{A_0} + \frac{1}{2} \frac{A_0 + A_1}{A_0 A_1} \right) g = \frac{(1+k)^2}{4 A_0} g_{12},$$

oder für $\gamma_1 + 95$ Einheiten. Für M_1, M_2, M_3 ist $p=2, q=1$ und es folgt

$$\Delta \alpha_2 = - \frac{k(1+k)^2}{4 A_0} g_{23} = - \frac{(1+k)^2}{4 A_1} g_{23},$$

sowie für $\gamma_2 - 91$ Einheiten. Setzt man laut Formel (15) $\gamma_{1/2} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$, so wird $\gamma_{1/2}$ fehlerhaft um nur etwa 2 Einheiten. Wenn k nicht viel von der Einheit abweicht, wird somit der Fehler sehr unbedeutend.

Bei grösserem k kann man einen Schritt weiter gehen. Man hat nämlich, falls g einigermaassen constant ist,

$$\Delta \alpha_{1/2} = \frac{1}{2}(\Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2) = \frac{(1-k)(1+k)^2}{8 A_0} g,$$

$$\Delta \alpha_{1/2} = \frac{1}{2}(\Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3) = - \frac{k(1-k)(1+k)^2}{8 A_0} g.$$

Setzt man nun $\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_{1/2} + \alpha_{1/2})$, so wird dieser Wert fehlerhaft nur um

$$\frac{1}{2}(\Delta \alpha_{1/2} + \Delta \alpha_{1/2}) = \frac{(1-k)^2(1+k)^2}{16 A_0} g.$$

Bei grossem k nimmt man daher zweckmässig die Mittel zweier successiven „ γ beobachtet“ der Tab. II, an welche dann die Reductionen $\Delta_1 \gamma$ und $\Delta_2 \gamma$ anzubringen sind, oder bedient sich vielleicht noch besser der Methode von Tab. IV.

Decrement der Ladungsschwingungen.

12. Es handelt sich jetzt darum, die aus den experimentellen Bestimmungen der Maxima und Minima von Ladungscurven nach den oben gegebenen Methoden berechneten Decremente mit der Theorie zu vergleichen. Zu diesem Zwecke sind zuerst in der folgenden Tabelle die Decremente derjenigen Curven zusammengestellt, für welche Beobachtungen der Maxima und Minima gemacht wurden. Ausser den charakteristischen Daten der Curven giebt die Tabelle sowohl die ohne eine Oscillation der Capacität, wie die mit oscillirender Capacität, einer Erhöhung der normalen Ladung um $\frac{1}{2} \Delta Q$ entsprechend, berechneten Decremente. Die Curven ordnen sich zu vier Serien zusammen, mit demselben Werte von L und C und verschiedenen Werten von W innerhalb jeder Serie. Ausserdem kommen einige einzeln stehende Curven vor, welche für einen besonderen Zweck in Art. 16 verwendet werden.

Bezeichnung der Curve	L in Henry	C in Mikrof.	W in Ohm	Definitives Decrement γ		
				Ohne osc. Cap.	Mit osc. Cap.	
Serie Ia	Nr. 1	0,5933	0,5071	3,217	0,02841 \pm 4,0	0,02843 \pm 3,5
	Nr. 2	0,5933	0,5071	12,563	0,03437 \pm 4,3	0,03441 \pm 4,3
	Nr. 3	0,5933	0,5071	24,693	0,04237 \pm 1,5	0,04239 \pm 1,2
Serie Ib	Nr. 1	0,5933	1,0119	3,191	0,02126 \pm 1,1	0,02138 \pm 1,2
	Nr. 2	0,5933	1,0119	6,356	0,02647 \pm 1,2	0,02652 \pm 1,3
	Nr. 3	0,5933	1,0119	12,577	0,03019 \pm 1,7	0,03024 \pm 1,3
	Nr. 4	0,5933	1,0119	18,679	0,03551 \pm 4,8	0,03554 \pm 4,9
	Nr. 5	0,5933	1,0119	24,725	0,04089 \pm 4,7	0,04091 \pm 4,5
Serie Ic	Nr. 1	0,5933	1,5182	3,193	0,01902 \pm 4,3	0,01911 \pm 4,9
	Nr. 2	0,5933	1,5182	12,556	0,02895 \pm 4,3	0,02906 \pm 3,1
	Nr. 3	0,5933	1,5182	24,674	0,04255 \pm 0,7	0,04262 \pm 1,3
Serie Id	Nr. 1	0,5933	2,0229	3,224	0,01703 \pm 4,9	0,01713 \pm 5,4
	Nr. 2	0,5933	2,0229	6,369	0,02194 \pm 3,2	0,02197 \pm 3,7
	Nr. 3	0,5933	2,0229	12,594	0,02954 \pm 2,2	0,02961 \pm 2,3
	Nr. 4	0,5933	2,0229	18,647	0,03719 \pm 3,1	0,03721 \pm 3,3
	Nr. 5	0,5933	2,0229	24,710	0,04447 \pm 2,4	0,04452 \pm 3,2
	Nr. 6	0,5933	2,0229	42,121	0,06615 \pm 2,7	0,06617 \pm 4,0
	Nr. 7	0,5933	2,0229	65,148	0,09567 \pm 16,3	0,09580 \pm 19,3
(A)	0,1926	2,0229	1,301	0,02384 \pm 1,9	0,02389 \pm 1,6	
(B)	1,1854	2,0229	6,158	0,01504 \pm 5,6	0,01507 \pm 5,4	
(C)	0,5933	0,2033	3,171	0,04294 \pm 7,8	0,04305 \pm 6,0	
(D)	0,09875	2,0229	1,250	0,04447 \pm 6,5	0,04443 \pm 7,0	
(E)	0,3843	2,0229	3,450	0,01941 \pm 0,7	0,01942 \pm 1,0	
(F)	0,8409	2,0229	5,123	0,01655 \pm 0,5	0,01660 \pm 0,6	

Die mit Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes sind wie ersichtlich fast ohne Ausnahme nur ganz unbedeutend grösser als die für nicht oscillirende Capacität sich ergebenden Werte. Der Unterschied rührt wohl hauptsächlich von der Berechnungsmethode der Decimente mit Oscillation her, welche ein willkürliches Element, die Versetzung der normalen Ladung, in sich schliesst, und dürften die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte als etwas zuverlässiger in Betracht kommen.

13. In Uebereinstimmung mit der Differentialgleichung (3) soll zwischen dem Widerstande W des Stromkreises und dem

definitiven logarithmischen Decremente der Schwingungen eine lineare Relation

$$(22) \quad \gamma = a + b W$$

bestehen, worin die Coefficienten die Werte

$$(23) \quad a = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)}; \quad b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

haben.

Setzt man die Werte von γ der obigen Tabelle für jede der vier Serien I graphisch aus, so sieht man, dass die erhaltenen Punkte überhaupt sehr gut in gerader Linie liegen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet man die folgenden linearen Relationen zwischen W und γ , wobei auch die wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten a und b in Einheiten der letzten Decimale angegeben sind.

Nicht oscillirende Capacität.

Serie Ia:	$\gamma = \{0,02628 \pm 7\} + \{0,0006505 \pm 42\} W,$
„ Ib:	$\gamma = \{0,01914 \pm 34\} + \{0,0008815 \pm 210\} W,$
„ Ic:	$\gamma = \{0,01539 \pm 19\} + \{0,0010967 \pm 117\} W,$
„ Id:	$\gamma = \{0,01350 \pm 15\} + \{0,0012588 \pm 48\} W.$

Oscillirende Capacität.

Serie Ia:	$\gamma = \{0,02630 \pm 6\} + \{0,0006500 \pm 36\} W,$
„ Ib:	$\gamma = \{0,01925 \pm 33\} + \{0,0008774 \pm 208\} W,$
„ Ic:	$\gamma = \{0,01550 \pm 17\} + \{0,0010956 \pm 107\} W,$
„ Id:	$\gamma = \{0,01354 \pm 15\} + \{0,0012595 \pm 47\} W.$

14. Die erhaltenen Coefficienten a und b sollen jetzt näher discutirt werden, wobei der Anfang mit dem Coefficienten a gemacht werden mag. Weil die Grössen R und r , d. h. der Isolationswiderstand des Condensators und der Widerstand der isolirenden Schichten der Inductionsspule bez., nicht direct gemessen worden sind, was besonders in Bezug auf die nicht genau definirbare Grösse r schwerlich ausführbar gewesen wäre, so ist eine Berechnung des theoretischen Wertes von a nicht möglich. Nichtsdestoweniger erlaubt die erste Formel (23) einige interessante Schlüsse betreffend der Grössen R und r und deren Einfluss auf die Dämpfung der Schwingungen zu ziehen. Aus dem beobachteten Werte von a lässt sich, weil

L und C bekannt sind, die Grösse $1/R + 1/r$ oder ihr reziproker Wert

$$(24) \quad w = \frac{Rr}{R+r}$$

berechnen. Man erhält hierbei, wenn man sich auf die ohne Oscillation der Capacität berechneten Werte des Decrementes beschränkt, folgende Zusammenstellung:

Serie	w in Ohm
Ia	28090
Ib	27290
Ic	27700
Id	27380

Diese Werte zeigen, dass w innerhalb der Fehlergrenzen constant bleibt, denn ihr Mittel beträgt

$$w = 27\,620 \pm 120$$

und der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung $240 = 0,9$ Proc., während das Mittel der wahrscheinlichen Fehler der Coefficienten a (p 92) gleich 1,1 Proc. ist.

Sämtliche Serien gehören derselben Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule und somit demselben Werte des Selbstinductionscoefficienten an. Es verbleibt also r derselbe in allen Serien. Dagegen variiert R von Serie zu Serie, weil die Capacität eine andere ist. Da w jedoch constant bleibt, so muss R überhaupt so gross sein, dass w von R unabhängig ist, und

$$(25) \quad w = r$$

zu nehmen ist. Dies stimmt auch mit der Erfahrung, dass der Isolationswiderstand eines guten Glimmercondensators noch in Megohm zu zählen ist.

Mit der Combination von Windungsgruppen an der Inductionsspule zeigte sich w als wesentlich veränderlich.¹⁾

In der experimentellen Bestimmung des Coefficienten a der Formel (22) besitzt man nach dem oben Gefundenen ein Mittel zur Messung des Isolationswiderstandes einer Inductionsspule.

1) Hj. Tallqvist, Untersuchungen über elektrische Schwingungen I. p. 96.

Die Differentialgleichung (3) nimmt die Form der Differentialgleichung (2) an, wenn man statt des wirklichen Widerstandes W des Stromkreises die Grösse

$$W' = W + \frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right)$$

als einen neuen (fictiven) Widerstand einführt. Für die Differenz der beiden Widerstände

$$(26) \quad W' - W = \frac{L}{C} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) = \frac{L}{C} \frac{1}{w}$$

ergibt sich bei den obigen Serien:

Serie	$W' - W$ in Ohm
Ia	41,65
Ib	21,48
Ic	14,11
Id	10,71

Diese Widerstände sind somit von derselben Grössenordnung wie die Widerstände W des Stromkreises und üben folglich einen wesentlichen Einfluss auf die Dämpfung der Ladungsschwingungen aus.

Schliesslich ist noch zu erwähnen, dass die *experimentelle Bestimmung des Coefficienten a der Formel (22) benutzt werden kann, um das Leitungsvermögen von schwach leitenden Substanzen zu messen*, indem man elektrische Oscillationen hervorruft, das eine Mal in einem Stromkreise, wie es für den gegenwärtigen Zweck construirt war, das andere Mal in demselben Stromkreise, nachdem der isolirende Körper der Inductionsspule oder dem Condensator parallel geschaltet worden ist.

15. Von grösserem Interesse noch als der Coefficient a ist der Coefficient b . Nach der zweiten Formel (23) ist der theoretische Wert von b

$$b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Die folgende Tabelle giebt einen Vergleich zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von b :

Nicht oscillirende Capacität				
Serie	Ia	Ib	Ic	Id
<i>b</i> beobachtet	0,0006505	0,0008815	0,0010967	0,0012588
<i>b</i> berechnet	0,0006307	0,0008909	0,0010913	0,0012596
<i>b</i> beob. — <i>b</i> ber.	+ 198	— 94	+ 54	— 8
Diff. in Proc.	+ 3,1	— 1,1	+ 0,5	— 0,1
Quadratsumme	51020			

Oscillirende Capacität				
Serie	Ia	Ib	Ic	Id
<i>b</i> beobachtet	0,0006500	0,0008774	0,0010956	0,0012595
<i>b</i> berechnet	0,0006307	0,0008909	0,0010913	0,0012596
<i>b</i> beob. — <i>b</i> ber.	+ 193	— 135	+ 43	— 1
Diff. in Proc.	+ 3,1	— 1,5	+ 0,4	0,0
Quadratsumme	57324			

Die Summe der Quadrate der Differenzen „*b* beob. — *b* ber.“, ist somit etwas grösser für die mit oscillirender Capacität berechneten *b*-Werte, als für die ohne Oscillation der Capacität gefundenen Werte. Die letzteren scheinen also auch hier etwas genauer als die ersteren zu sein. In den Columnen Ia, Ib, Ic, und Id sind für nicht oscillirende Capacität die wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Werte von *b* bez. 0,7, 2,4, 1 und 0,4 Proc., und es geht somit hervor, dass die Differenzen „*b* beob. — ber.“ im allgemeinen innerhalb der Fehlergrenzen liegen. Nur die erste Differenz macht eine kleine Ausnahme, welche jedenfalls sehr erklärlich ist, wenn man bedenkt, dass die entsprechende Grösse „*b* beob.“ aus nur drei Decrementsbestimmungen hervorgegangen ist, und der wahrscheinliche Fehler somit ganz zufällig relativ klein ausgefallen sein kann, obgleich die Grösse selbst in der Wirklichkeit nicht unbedeutend fehlerhaft sein mag. In der zur Column Ia gehörenden linearen Relation $\gamma = a + bW$ scheint *a* zu klein und *b* zu gross erhalten worden zu sein. Jedenfalls geht das wichtige Resultat hervor: *In Bezug auf den*

Coefficienten b der Gleichung (22) stimmen Theorie und Erfahrung miteinander überein.

Anwendungen.

16. Nach dem Verhalten der normalen Ladung bei der in den Art. 4 bis 10 behandelten Schwingungscurve könnte man vermuten, dass die Capacität des Condensators sich während der Schwingungen schneller dem definitiven Werte nähert als bei „directer“ Ladung, ohne merkbare Induction im Stromkreise. Man hat nämlich nach neunzehn Halbosillationen nach der Tabelle I die normale Ladung 231,47, somit die Differenz $231,98 - 231,47 = 0,51$ oder 0,22 Proc., während aus einer Ladungscurve ohne Induction die Differenz von etwa 0,5 Proc. wahrzunehmen ist. Um hierüber zu entscheiden, ist die folgende Tabelle zusammengestellt, welche sämtliche (p. 91) angeführten Curven umfasst. Die Tabelle giebt den Unterschied des Wertes der normalen Ladung „Q verb.“ am Ende der zehnten vollen Oscillation, welcher Wert von den eventuell vorhandenen Oscillationen der Capacität höchst unbedeutend beeinflusst sein dürfte, gegen die definitive Ladung in Procenten der letzteren an. Ferner enthält die Tabelle den Wert, den der Unterschied zwischen dem definitiven und dem augenblicklichen Werte der Capacität am Ende der für zehn volle Oscillationen verwendeten Zeit bei directer Ladung haben würde, für dieselbe Combination von Capacität und Anzahl Accumulatoren im Stromkreise, und zwar in Procenten der definitiven Capacität. Die letzteren Werte sind den p. 85, Art. 9 erwähnten Ladungscurven ohne Inductionsspule entnommen.

Der Unterschied zwischen den beiden Mitteln: 0,51 für oscillirende Ladung, und 0,48 für nicht oscillirende Ladung ist so gering, dass mit Beachtung auch der Unsicherheit dieser Art von Untersuchungen überhaupt der Schluss berechtigt ist: *Nach relativ kurzer Zeit, vom Anfang der Ladung an gerechnet, erreicht die Capacität eines guten Glimmercondensators denselben Wert, es mag die Ladung eine oscillirende oder nicht oscillirende sein.* Natürlich müssen die Schwingungen gedämpft sein, sodass die Amplituden nach der in Frage stehenden Zeit schon ziemlich klein geworden sind.

Nr. der Curven		Capacitäts- differenz bei Schwingungen	Capacitäts- differenz bei directer Ladung	Differenz
Serie Ia	Curve Nr. 1	0,58	0,49	+ 0,09
	" " 2	0,64	0,49	+ 0,15
	" " 3	0,34	0,49	- 0,15
Serie Ib	" " 1	0,10	0,47	- 0,37
	" " 2	0,61	0,47	+ 0,14
	" " 3	0,33	0,47	- 0,14
	" " 4	0,45	0,47	- 0,02
	" " 5	0,41	0,47	- 0,06
Serie Ic	" " 1	1,06	0,45	+ 0,61
	" " 2	0,43	0,45	- 0,02
	" " 3	0,34	0,45	- 0,11
Serie Id	" " 1	0,66	0,42	+ 0,24
	" " 2	0,58	0,42	+ 0,16
	" " 3	0,35	0,42	- 0,07
	" " 4	0,63	0,42	+ 0,21
	" " 5	0,32	0,42	- 0,10
	" " 6	0,29	0,42	- 0,13
	" " 7	0,35	0,42	- 0,07
Curve (A)		0,64	0,57	+ 0,07
" (B)		0,63	0,38	+ 0,25
" (C)		0,98	0,74	+ 0,24
" (D)		0,32	0,59	- 0,27
" (E)		0,68	0,54	+ 0,14
" (F)		0,42	0,53	- 0,11
Mittel:		0,51	0,48	+ 0,03

17. Weil die experimentell gefundenen Werte der Coefficienten b mit den theoretischen Werten stimmen, kann man sie für die Bestimmung von Selbstinductionscoefficienten und Capacitäten verwenden. In dem gegebenen Stromkreise mit unveränderter Capacität und Selbstinduction, aber wenigstens zwei verschiedenen Widerständen werden elektrische Oscillationen hervorgerufen, die Oscillationszeit T und der Coefficient b bestimmt. Alsdann kann man C und L berechnen. Die Bestimmung dieser beiden Grössen wird folglich auf Zeit- und Widerstandsmessungen allein zurückgeführt. Für die Berechnung von C und L hat man die aus den Formeln

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

und

$$b = M \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

folgenden Ausdrücke

$$(27) \quad C = \frac{1}{M\pi^2} T b = 0,23330 T b,$$

$$(28) \quad L = \frac{M}{4} \frac{T}{b} = 0,10857 \frac{T}{b},$$

wobei für T die auf definitive Capacität corrigirten Werte zu gebrauchen sind. Diese Correction ist sonst sehr klein; für die unten gegebenen Schwingungszeiten

$$\Delta T = T \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C} = \text{etwa } 0,0022 T.$$

Für die Serien Ib, Ic und Id hat man folgende Zusammenstellung:

Serie:	Ib	Ic	Id
Oscillationszeit T in Millisekunden:	4,840	5,920	6,867
Coefficient „b beob.“ in 10 ⁻⁹ sec/cm:	0,0008815	0,0010967	0,0012588

und berechnet mittels der Formeln (27) und (28)

Capacität in Mikrofarad:	0,995	1,515	2,017
Selbstinductionscoefficient in Henry:	0,5961	0,5861	0,5923

welche Werte alle annehmbar sind. Das Mittel der Werte von L ist 0,5915; somit sehr gut.

(Eingegangen 27. October 1900.)

5. Ueber den Schmelzpunkt des Goldes; von L. Holborn und A. Day.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Im Anschluss an die Messung hoher Temperaturen mit dem Luftthermometer haben wir die Schmelzpunkte verschiedener Metalle zwischen 300 und 1100° bestimmt.¹⁾ Wir benutzten zwei Verfahren, die wir als die Tiegelmethode und die Drahtmethode bezeichneten. Der Schmelzpunkt des Goldes wurde damals nur nach dem letzteren Verfahren gemessen, indem wir einen etwa 1 cm langen Golddraht in die Lötstelle des Thermoelementes einschmolzen. Bei der Wichtigkeit, welche gerade dem Schmelzpunkt des Goldes für die Vergleichung der Temperaturscalen verschiedener Beobachter zukommt, erschien es uns angemessen, diesen Schmelzpunkt auch nach der Tiegelmethode zu bestimmen und gleichzeitig zu prüfen, ob die umgebende Atmosphäre die Schmelztemperatur beeinflusst.

Für den Versuch kamen stets etwa 450 g Gold zur Verwendung, das als reines Metall von der Frankfurter Gold- und Silberscheideanstalt bezogen war. Eine Probe von 2 g, nochmals im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt analysirt, enthielt keine Verunreinigung.

Das Gold wurde in dem früher beschriebenen elektrischen Schmelzofen erhitzt und die Temperatur mit demselben Thermoelement gemessen, das vorher bei der Drahtmethode benutzt worden war.

Vorversuche, die anfangs mit einer kleineren Goldmenge (350 g) und einem dünnwandigen Schmelztiegel aus Porzellan angestellt wurden, ergaben infolge der geringen Schmelzwärme des Metalles keinen guten Verlauf der Zeitcurven und namentlich Abweichungen zwischen Erstarrungspunkt und Schmelzpunkt bis zu 4°. Erst als wir 450 g Gold nahmen und den dünnwandigen Porzellantiegel in einen mit Asbest ausgefütterten weiteren Tiegel einsetzten, um das Gold der directen Ein-

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 523. 1900.

wirkung der Heizspule mehr zu entziehen, erhielten wir bessere Resultate. Bei dem Gebrauch von Graphittiegeln, deren Wandung 5 mm dick war, waren die Schwierigkeiten überhaupt geringer, sodass wir später solche ausgebrannte Tiegel, deren Wandung nur noch Thon enthielt, da benutzten, wo es uns auf die reducirende Wirkung des Graphits nicht ankam.

Das schmelzende Gold befand sich entweder in der reducirenden Atmosphäre eines Graphittiegels, wobei in einigen Fällen noch Kohlensäure durch ein dünnes Porzellanröhrchen (1 mm weit und 0,5 mm Wandstärke) in das Metall eingeleitet wurde, oder es kam ein doppelter Porzellantiegel oder ein Thontiegel (ausgebrannter Graphittiegel) zur Anwendung, in denen das Metall einmal unter Luftzutritt, das andere Mal unter Einleiten von Sauerstoff zum Erstarren oder Schmelzen gebracht wurde.

Tab. I enthält die Temperatur t (in Mikrovolt und Grad), die für den Erstarrungspunkt E und den Schmelzpunkt S beobachtet wurde. i bedeutet die Stromstärke der Heizspule.

Tabelle I.

Tag	i (Amp.)	t		Mittel	
		MV	Grad		
Im Graphittiegel.					
21. Juni	8,0	E	10194	1063,3°	1063,5°
	9,2	S	10197	1063,6	
	7,5	E	10194	1063,3	
	8,8	S	10197	1063,6	
9. Juli	6,8	E	10197	1063,6	
	8,3	S	10196	1063,5	
	6,8	E	10197	1063,6	
	8,2	S	10195	1063,4	
Im Graphittiegel unter Einleiten von CO ₂ .					
11. Juli	7,2	E	10198	1063,6°	1063,5°
	8,5	S	10193	1063,6	
	7,0	E	10196	1063,5	
	8,2	S	10199	1063,7	
	6,8	E	10194	1063,3	
	7,9	S	10196	1063,5	

Tabelle I (Fortsetzung).

Tag	<i>i</i> (Amp.)	<i>t</i>		Mittel
		MV	Grad	

Im doppelten Porzellantiegel.

27. Juni	8,0	<i>E</i>	10190	1063,0°	1063,3°
	9,0	<i>S</i>	10198	1063,6	
	7,5	<i>E</i>	10188	1062,8	
	9,5	<i>S</i>	10197	1063,6	

Im doppelten Porzellantiegel (oder Thontiegel) unter Einleiten von O.

29. Juni	7,3	<i>E</i>	10200	1063,8°	1063,5°
	8,7	<i>S</i>	10199	1063,7	
	7,0	<i>E</i>	10192	1063,1	
	8,5	<i>S</i>	10199	1063,7	
12. Juli	6,7	<i>E</i>	10189	1062,9	1063,5°
	7,8	<i>S</i>	10195	1063,4	
	6,5	<i>E</i>	10193	1063,2	
13. Juli	6,2	<i>E</i>	10198	1063,6	1064,1
	7,5	<i>S</i>	10203	1064,1	

Die verschiedenen Werte von *t* zeigen keine systematischen Unterschiede, als Gesamtmittel ergibt sich 1063,5°.

Der Verlauf der Zeitcurven, von denen einige Beispiele in Tab. II enthalten sind, stimmt in den verschiedenen Fällen nicht so gut überein. Namentlich fallen diejenigen auf, die bei dem Einleiten von Sauerstoff erhalten werden. Einerseits stellt sich der stationäre Zustand hier nicht so scharf her wie sonst, andererseits pflegt die Temperatur bei dem Schmelzen des Metalles vielfach über den Schmelzpunkt glatt hinüber zu steigen und später erst wieder darauf zurückzukommen. Dass die Ursache hierfür nicht in dem Rühren liegt, welches das Einleiten der Gasblasen bewirkt, zeigen die Fälle, wo Kohlen-säure in das Gold eingeleitet wurde. Ueberhaupt verlaufen die Zeitcurven bei dem Einleiten von Sauerstoff und selbst bei dem Zutritt der gewöhnlichen Atmosphäre vielfach unregelmässig.

Tabelle II.
Zeitcurven (MV).

Minuten	Gold im Graphittiegel		Gold im Graphittiegel unter Einleiten von CO ₂		Gold unter Einleiten von O		Kupfer in Luft
	E	S	E	S	E	S	E
1	10331	10084	10402	10117	10366	10027	10590
2	10261	10150	10346	10166	10276	10074	10470
3	10209	10190	10298	10192	10223	10101	10352
4	10207	10194	10246	10195	10205	10144	10281
5	10203	10195	10200	10197	10201	10170	10217
6	10200	10195	10199	10194	10199	10198	10204
7	10199	10195	10199	10194	10199	10254	10212
8	10198	10195	10199	10194	10198	10238	10212
9	10197	10197	10198	10194	10196	10222	10212
10	10197	10199	10198	10196	10193	10205	10212
11	10197	10203	10198	10196	10194	10202	10212
12	10196	10212	10198	10197	10193	10201	10212
13	10196	10222	10198	10198	10194	10202	10212
14	10195	10231	10198	10199	10192	10203	10212
15	10194	10240	10197	10200	10191	10203	10212
16	10192	10248	10198	10201	10189	10203	10212
17	10188	10257	10197	10202	10186	10208	10211
18	10178	10272	10197	10205	10184	10216	10210
19	10070	10400	10197	10206	10184	10212	10208
20	9995	—	10196	10205	10183	10222	10204
21	—	—	10196	10209	10174	10230	10195
22	—	—	10195	10204	10159	11360	10176
23	—	—	10195	10202	10065	—	10027
24	—	—	10194	10214	—	—	—
25	—	—	10192	10296	—	—	—
26	—	—	10190	10400	—	—	—
27	—	—	10186	—	—	—	—
28	—	—	10177	—	—	—	—
29	—	—	10083	—	—	—	—

Hiernach lässt sich vermuten, dass das schmelzende Metall in diesen Fällen Sauerstoff aufnimmt. Der Einfluss dieser Erscheinung auf den Schmelzpunkt kann jedoch nur gering sein und übersteigt nicht die sonstigen Beobachtungsfehler.

Von demselben Gold, das für die Schmelzungen im Tiegel gedient hat, wurden einige Gramm zu einem Draht von 0,25 mm Durchmesser ausgezogen, den wir dann als Schmelzprobe für die Drahtmethode benutzten, deren Brauchbarkeit für das Gold natürlich besonders erwünscht ist. Es kam hierbei dasselbe Thermoelement zur Verwendung. Die beiden Drähte, die durch einen kurzen Golddraht verbunden waren, ragten möglichst spannungsfrei in den Schmelzofen, in dem sich ein leerer Porzellantiegel befand.

Fünf Versuche ergaben folgende Werte für die Schmelztemperatur:

26. September	{	10206 MV	1064,3°
		10197	1063,6
		10203	1064,1
		10199	1063,7
		10198	1063,6

Der Mittelwert 1063,9° weicht nur um 0,4° von dem Resultate der Tiegelmethode ab und um 0,1° von dem früheren Ergebnis der Drahtmethode, für die wir andere Goldproben benutzten.

Bei der Aichung von Thermoelementen kann man sich also ohne Bedenken der Drahtmethode für die Bestimmung des Goldschmelzpunktes bedienen. Man braucht in diesem Falle für einen Versuch nur etwa 0,03 g Gold.

Zieht man aber aus irgend einem Grunde die Tiegelmethode vor, so kann man auch dann für die Aichung den naheliegenden Schmelzpunkt des Kupfers unter Luftzutritt benutzen, der von uns zu 1064,9° bestimmt worden ist. Dieser Punkt ist, abgesehen von den geringeren Kosten, wegen der grösseren Schmelzwärme des Kupfers bequemer. Tab. II enthält zum Vergleich mit dem Gold eine Zeitcurve, die am 1. October mit 370 g Kupfer (im dünnwandigen Porzellantiegel) beobachtet wurde. Die Stärke i des Heizstromes betrug 5,2 Amp., war also geringer gewählt als in irgend einem Falle bei der Erstarrung des Goldes.

(Eingegangen 7. November 1900.)

6. *Ueber die Ausdehnung einiger Metalle in hoher Temperatur;*
von L. Holborn und A. Day.

(Mittheilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Ueber die Ausdehnung von Körpern in hoher Temperatur liegen bis jetzt nur spärliche und teilweise wenig genaue Angaben vor. Wir haben deshalb eine neue Methode, nach der kürzlich von uns die Ausdehnung von Platiniridium und Porzellan bis 1000° für luftthermometrische Zwecke bestimmt wurde, noch auf verschiedene Metalle angewandt. Bis zu derselben Temperaturgrenze sind wir mit Platin, Palladium und Nickel gelangt, während Silber bis nahe an seinen Schmelzpunkt, Constantan bis 500° beobachtet wurde. Endlich ist noch je eine Sorte von Eisen und Stahl, die sowohl wegen ihrer Zustandsänderungen, wie wegen ihrer technischen Verwendung grosses Interesse bieten, bis 750° untersucht.

Weil in hohen Temperaturen eine gleichmässige Erwärmung auf grössere Längen schwer zu erzielen ist, hat man die Ausdehnungsbestimmungen vielfach mit kleinen Längen angestellt und infolge dessen nur eine geringe Genauigkeit erzielt oder man hat auf eine gleichmässige Temperatur des Probestabes ganz verzichtet, ihn z. B. quer durch einen Ofen gelegt und auf Marken an den stets kalt bleibenden Enden eingestellt. Im letzten Falle wurde dann nur die Mitteltemperatur des Stabes mit dem Luftthermometer oder mit dem elektrischen Widerstand gemessen. Dies Verfahren hat den Nachteil, dass die Abhängigkeit der Ausdehnung von der Temperatur nicht scharf zu beobachten ist.

Bei unserer Versuchsanordnung, die schon früher¹⁾ beschrieben worden ist, wird ein 0,5 m langer Stab möglichst gleichmässig in einem elektrisch geheizten Porzellanrohr erhitzt. Wir erzielen damit einmal Ausdehnungen von grossem Betrage (bis zu 9 mm), sodann ein verhältnismässig kleines Temperatur-

1) L. Holborn u. A. Day, Ann. d. Phys. 2. p. 506. 1900.

gefälle, von dem ausserdem nicht nur der Mittelwert, sondern auch der ganze Verlauf gemessen wird.

Längenmessung. — Die Ausdehnung wird mit dem Ocularmikrometer feststehender Mikroskope gemessen, die auf Teilstriche an den Enden des Stabes gerichtet sind. Die ganze Aufstellung war auf einem grossen Steinpfeiler so dauerhaft eingerichtet, dass wir nach Tagen noch keine Verschiebungen beobachten konnten, welche die Grenze der Beobachtungsfehler überschritten.

Den Unterschieden, welche die Messungen der verschiedenen Stäbe im kalten Zustand zwischen den einzelnen Heizungen aufweisen, entsprechen deshalb dauernde Längenänderungen der Stäbe. Vielfach ist dies auch dadurch bestätigt worden, dass die Länge eines Stabes vor und nach dem Heizen auf der Teilmaschine gemessen wurde.

Weil jedoch trotzdem eine zufällige kleine Aenderung der Aufstellung nicht überall ausgeschlossen ist, so wurde die Ausdehnung auf den kalten Zustand vor der Heizung bezogen, der immer an demselben Tage kurz vor Beginn der Erwärmung gemessen wurde, während die Bestimmung am Schluss der Reihe erst am folgenden Tage nach der vollständigen Abkühlung des Ofens erfolgen konnte. Wir teilen die meistens nur geringen Unterschiede zwischen den beiden Messungen mit.

Selbstverständlich ist hierbei von den Aenderungen abzu- sehen, die bei der ersten Heizung eines Stabes auftraten und die oft einen viel grösseren Betrag erreichen, d. h. wir gehen stets von dem ausgeglühten Zustande aus, der sich durch eine einmalige Erhitzung auf die höchste der später angewandten Temperaturen herstellte.

Erwähnt sei noch, dass der Schraubenwert der Mikroskope sich unmittelbar aus den Ablesungen bei Zimmertemperatur ergab, da die Intervalle der Teilstriche vorher auf der Teilmaschine gemessen waren. Die sonstigen Einzelheiten der Längenmessung gehen ohne weiteres aus dem unten angeführten Beispiel einer Beobachtungsreihe hervor.

Temperaturmessung. — Bei den Ausdehnungsbestimmungen wurde die Temperatur nur in der Mitte des Stabes gemessen, und zwar mit einem Thermoelement, dessen blanke Lötstelle auf dem Stabe auflag. Das Temperaturgefälle nach den Enden

zu haben wir gesondert bestimmt, indem noch auf jeder Seite an vier Punkten der Temperaturunterschied gegen die Mitte durch Verschieben der Lötstelle gemessen wurde.

Für die vorliegenden Beobachtungen sind zwei verschiedene Heizrohre benutzt worden. In dem ersten Rohr, zu dessen Wickelung ein 2 mm dicker Nickeldraht verwendet wurde, war die Verteilung der Temperatur ungleichmässiger als im zweiten, das mit einem 1,2 mm starken Draht in trifilarer Wickelung hergestellt war. Wir haben uns durch Wiederholung der ersten Wickelung überzeugt, dass die Gleichmässigkeit der Heizung mit dem dickeren Draht, der den Vorteil grösserer Haltbarkeit bietet, bei einem so langen und engen Rohr kaum zu verbessern ist. Trotz der grossen Sorgfalt, mit der die Windungen angeordnet wurden, ergaben sich häufig noch schlechtere Resultate. Auf dem zweiten Rohr folgen die Windungen nach den Enden zu etwas dichter aufeinander als in der Mitte. Vollständig lässt sich aber der Temperaturabfall an den zum Durchvisiren vorgesehenen Löchern nur schwer vermeiden, ohne dass man die benachbarten Stellen übercompensirt. Der Grund liegt darin, dass an den Löchern eine ganze Windung ausfallen muss.

Tab. 1 enthält Beispiele für die Temperaturverteilung in den beiden Heizrohren. Der zu messende Stab trug natürlich durch Leitung zum Temperatenausgleich etwas bei. Dies tritt bei der Vergleichung von Silber (6 mm dick) einerseits mit Platin (5 mm dick) und Palladium (5 mm dick) andererseits hervor. Nickel ist noch aufgeführt, weil hier zwischen den beiden Messungen bei 750° eine längere Pause liegt, in welcher der Ofen anderweitig benutzt wurde. Man sieht, dass das Gefälle auch durch die Abnutzung der Heizspule nicht erheblich verändert wird.

Die Zahlen der Tab. 1 geben die Temperaturunterschiede, die an acht Stellen des Rohres gegen die Mitte gemessen worden sind, in Mikrovolt. Die Abhängigkeit der Thermokraft des benutzten Elementes von der Temperatur ist früher in Tab. XVI (l. c. p. 522) mitgeteilt. Das Mittel Δ des Temperaturgefälles ist auf graphischem Wege gebildet und muss zu der in der Stabmitte abgelesenen Temperatur algebraisch addirt werden, wenn man die Mitteltemperatur des Stabes erhalten will.

Tabelle 1.
Temperaturgefälle im Heizrohr (MV).

Von der Mitte entfernt	Platin							
	I. Heizrohr				II. Heizrohr			
	250°	500°	750°	1000°	250°	500°	750°	1000°
6 cm Ost	- 22	- 10	+ 17	0	+10	+ 35	+ 46	+ 77
12 "	- 33	- 23	+ 27	+ 25	+56	+125	+183	+227
19 "	-170	-230	-250	-443	+79	+157	+189	+171
23 "	-282	-310	-610	-900	-79	-196	-248	-411
6 West	+ 57	+170	+230	+335	- 5	+ 9	+ 49	+ 99
12 "	+ 73	+220	+315	+540	+38	+135	+238	+342
19 "	- 62	- 5	0	+ 53	+89	+227	+345	+398
23 "	-210	-250	-380	-480	-12	+ 42	- 9	-143
Δ	- 44	- 11	+ 4	+ 51	+25	+ 64	+116	+135

Von der Mitte entfernt	II. Heizrohr							
	Palladium				Silber			
	250°	500°	750°	1000°	250°	500°	750°	875°
6 cm Ost	+ 13	+ 29	+ 55	+ 80	+ 3	+ 21	+ 35	+ 19
12 "	+ 59	+128	+180	+236	+47	+107	+150	+142
19 "	+ 80	+155	+188	+164	+78	+140	+163	+125
23 "	-100	-165	-210	-402	-84	-174	-220	-344
6 West	- 1	+ 12	+ 53	+ 94	+ 1	+ 15	+ 52	+ 20
12 "	+ 52	+148	+269	+356	+23	+ 82	+153	+177
19 "	+ 95	+233	+358	+399	+48	+133	+217	+223
23 "	+ 12	+ 34	- 3	-129	+ 3	+ 48	- 29	+ 11
Δ	+ 31	+ 77	+124	+135	+16	+ 49	+ 80	+ 62

Von der Mitte entfernt	Nickel im II. Heizrohr					
	250°	375°	500°	750°	750°	1000°
6 cm Ost	+16	+ 22	+ 27	+ 59	+ 57	+ 82
12 "	+64	+ 91	+124	+196	+191	+258
19 "	+89	+117	+147	+194	+168	+196
23 "	-87	-111	-150	-205	-226	-337
6 West	+ 4	+ 15	+ 26	+ 64	+ 75	+120
12 "	+55	+110	+163	+303	+393	+458
19 "	+99	+177	+248	+405	+445	+509
23 "	+13	+ 20	+ 21	- 29	- 26	-221
Δ	+38	+ 74	+109	+152		+185

Beobachtet wurde erstens bei Zimmertemperatur, die mit einem in das Heizrohr eingeführten Quecksilberthermometer gemessen wurde, und ferner in möglichster Nähe von 250, 500, 750 und 1000°. In einigen Fällen sind noch Zwischenpunkte bei 375, 625 und 875° eingeschoben. Unter 250° sind wir jedoch wegen der geringeren Empfindlichkeit des Thermoelements nicht hinabgegangen. Für diese tieferen Temperaturen wird man auch zweckmässiger ein Bad vorsehen. Die Anordnung und Heizung brauchte dabei in leicht ersichtlicher Weise nicht wesentlich verändert zu werden. Mit einem Salpeterbade könnte man selbst bis über 600° eine vollständig gleichmässige Temperatur längs des ganzen Stabes erzielen.

1. Platin.

Der Platinstab ist ebenso wie die beiden folgenden Stäbe aus chemisch reinem Material von der Firma Heräus in entgegenkommener Weise zur Verfügung gestellt worden. Der 5 mm dicke Stab wurde in beiden Heizrohren gemessen. Auf zwei Ebenen, die 5 mm von jedem Ende entfernt bis auf die Axe des Stabes angefeilt waren, befanden sich je fünf Teilstriche.

Tab. 1 a enthält beispielsweise die Ablesungen der Mikroskope bei einer Beobachtungsreihe. Mit F und F' sind die Einstellungen auf die festen Fäden, mit I bis V und I' bis V' die Einstellungen auf die Striche an den beiden Stabenden bezeichnet. t bedeutet die Temperatur in Grad oder Mikrovolt.

Bei jeder Temperatur (20, 250, 500, 750, 1000 und 19° nach erfolgter Abkühlung) werden zwei Sätze von Ablesungen gemacht. Die Mikroskope werden hierbei jedesmal in symmetrischer Reihenfolge mit Hin- und Rückgang der Schraube eingestellt, sodass in dem Mittel auch eine kleine Bewegung des Stabes, die oft vorkam, möglichst herausfällt. Das Thermolement wird inzwischen fünfmal abgelesen.

Aus diesen Beobachtungen sind die Verschiebungen der einzelnen Striche zwischen den Temperaturgrenzen t und t' berechnet, welche für jeden Satz und jeden Strich gesondert in Tab. 1 b enthalten sind. Das positive Vorzeichen bedeutet eine Verschiebung des Striches nach dem betreffenden Stabende hin. In den Columnen M und M' haben wir die in

Tabelle 1 b.
Beobachtungen des Platinabes am 16. Juni.

t	t'	I	II	III	IV	V	Mittel M		$\Sigma = M + M'$
							u	mm	mm
20,3°	1813 MV	0,591	0,586	0,592	0,593	0,588	0,592	0,669	1,044
20,3	1822	0,589	0,590	0,592	0,594	0,594	0,592	0,669	1,044
1813 MV	4132	1,261	1,255	1,255	1,257	1,253	1,254	1,417	1,200
1822	4143	1,265	1,264	1,259	1,263	1,268	1,262	1,425	1,206
4132	6600	1,290	1,282	1,280	1,279	1,279	1,282	1,449	1,268
4143	6615	1,302	1,306	1,301	1,295	1,298	1,300	1,469	1,247
6600	9422	1,601	1,604	1,596	1,623	1,600	1,605	1,812	1,417
6615	9429	1,610	1,605	1,603	1,602	1,592	1,602	1,810	1,413
19,3°	20,3°	-0,430	-0,424	-0,419	-0,418	-0,421	-0,422	-0,477	0,008
19,3	20,3	-0,428	-0,420	-0,423	-0,417	-0,420	-0,422	-0,477	0,014
t	t'	I'	II'	III'	IV'	V'	Mittel M'		
							u'	mm	
20,3°	1813 MV	0,352	0,355	0,360	0,362	0,358	0,357	0,375	
20,3	1822	0,347	0,351	0,363	0,360	0,365	0,357	0,375	
1813 MV	4132	-0,221	-0,206	-0,210	-0,197	-0,200	-0,207	-0,217	
1822	4143	-0,212	-0,215	-0,216	-0,204	-0,204	-0,209	-0,219	
4132	6600	-0,176	-0,188	-0,186	-0,183	-0,178	-0,182	-0,191	
4143	6615	-0,220	-0,220	-0,211	-0,207	-0,204	-0,212	-0,222	
6600	9422	-0,386	-0,385	-0,379	-0,369	-0,368	-0,377	-0,396	
6615	9429	-0,389	-0,386	-0,381	-0,386	-0,371	-0,379	-0,397	
19,3°	20,3°	0,459	0,458	0,470	0,464	0,462	0,463	0,486	
19,3	20,3	0,463	0,468	0,475	0,464	0,473	0,468	0,491	

Schraubenumdrehungen (u und u') ausgedrückten Werte zu einem Mittel zusammengefasst und in Millimeter umgerechnet, deren Summen alsdann unter Σ aufgeführt sind.

Für die übrigen Beobachtungsreihen beschränken wir uns darauf, die Werte von M , M' und Σ mitzuteilen. Tab. 1c enthält diese Werte für die Beobachtungen an dem Platinstabe, der während der ersten beiden Tage im ersten Heizrohr, später im zweiten lag. Je zwei zusammengehörige Werte von Σ stimmen befriedigend überein.

Tabelle 1c.
Platinstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)		t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
24. Febr.	19,9°					19,9°			
	1900 MV	0,799	0,249	1,048		1912 MV	0,799	0,257	1,056
	4255	0,680	0,541	1,221		4265	0,653	0,564	1,217
	6830	0,312	0,990	1,302		6838	0,294	0,985	1,279
	9649	1,143	0,239	1,382		9660	1,213	0,198	1,411
27. Febr.	17,8°					17,8°			
	1920 MV	0,794	0,275	1,069		1928 MV	0,798	0,280	1,078
	4250	0,548	0,664	1,212		4256	0,554	0,645	1,199
	6823	0,525	0,759	1,284		6823	0,498	0,786	1,284
	9639	1,022	0,345	1,367		9631	1,055	0,334	1,389
16. Juni	20,3°					20,3°			
	1818 MV	0,669	0,375	1,044		1822 MV	0,669	0,357	1,026
	4132	1,417	-0,217	1,200		4143	1,425	-0,219	1,206
	6600	1,449	-0,191	1,258		6615	1,469	-0,222	1,247
	9422	1,812	-0,395	1,417		9429	1,810	-0,397	1,413
20. Juni	20,1°					20,1°			
	4190 MV	2,634	-0,375	2,259		4200 MV	2,638	-0,379	2,259
	6564	1,381	-0,156	1,225		6570	1,403	-0,186	1,217
	9365	1,736	-0,328	1,408		9384	1,751	-0,343	1,408

Die Werte Σ sind alsdann auf runde Temperaturgrenzen, 0 und 250° etc., umgerechnet, indem aus einer Näherungsformel für die Ausdehnung λ , des Stabes die hierzu not-

wendigen Werte von $d\lambda_e/dt$ abgeleitet wurden. An den in der Mitte des Stabes abgelesenen Werten von t war hierbei noch die Correction Δ wegen des Gefälles anzubringen. Auf diese Weise ist Tab. 1d entstanden, in der nur die Mittel Σ' aus je zwei zusammengehörigen Werten von Σ angegeben sind.

Tabelle 1d.

Platinstab.

t	Σ' (mm)				λ (mm)	
	Im I. Heizrohr		Im II. Heizrohr		beob.	ber.
	24. Febr.	27. Febr.	16. Juni	20. Juni		
0°					0	0
250	1,111	1,114	1,116	2,289	1,114	1,112
500	1,196	1,192	1,184		2,301	2,304
750	1,271	1,268	1,270	1,285	3,574	3,576
1000	1,344	1,334	1,386	1,377	4,934	4,928

Zu dieser Tabelle ist noch hinzuzufügen, dass der Platinstab zuerst am 23. Februar ausgeglüht wurde. Hierbei beobachteten wir für 500° $\lambda_e = 2,306$ mm und für 1000° $\lambda_e = 4,986$ mm. Nach der Abkühlung ergab sich eine bleibende Ausdehnung des Stabes von 0,084 mm, während nach den vier in der Tabelle enthaltenen Beobachtungstagen bleibende Aenderungen von 0,020, 0,028, -0,007 und -0,004 mm beobachtet wurden.

Die Uebereinstimmung der verschiedenen Reihen ist bis 750° durchweg befriedigend. Nur in dem Intervall von 750 bis 1000° treten Abweichungen zwischen den beiden Heizrohren auf, die 1 Proc. der gesamten Ausdehnung erreichen.

Die Ausdehnung λ , des Stabes (in μ) lässt sich durch die quadratische Formel

$$\lambda_e = 4,288 t + 0,000640 t^2 (\mu)$$

darstellen. Da die Länge, bezogen auf das Mittel der Striche an jedem Ende, 483,5 mm bei 0° betrug, so folgt für die Ausdehnung λ ¹⁾ der Längeneinheit:

$$\lambda = \{8868 t + 1,324 t^2\} 10^{-9}.$$

1) Die früher (l. c. p. 509) mitgeteilte Formel bezog sich nur auf die Beobachtungen mit dem ersten Heizrohr.

Benoit¹⁾ hat für die Ausdehnung von reinem Platin aus Beobachtungen, die er zwischen 0 und 75° nach der Fizeau'schen Methode anstellte, die Formel

$$\lambda = \{8901 t + 1,21 t^2\} 10^{-6}$$

abgeleitet. Extrapoliert man diese Gleichung, so tritt erst bei 1000° ein Unterschied von 1 Proc. gegen unseren beobachteten Mittelwert auf.

2. Palladium.

Für den Palladiumstab (5 mm dick) sind in Tab. 2a und 2b die Beobachtungen mitgeteilt, die alle mit dem zweiten Heizrohr angestellt wurden. Anfangs war der Stab im ersten

Tabelle 2a.

Palladiumstab.

	<i>t</i>	<i>M</i> (mm)	<i>M'</i> (mm)	Σ (mm)		<i>t</i>	<i>M</i> (mm)	<i>M'</i> (mm)	Σ (mm)
26. Juni	19,6°				1819 MV	19,6°	1,362	0,018	1,380
	1810 MV	1,349	0,086	1,385		1819 MV	1,434	0,177	1,611
	4093	1,432	0,176	1,608		4098	1,198	0,515	1,713
	6571	1,197	0,526	1,723		6585	1,718	0,172	1,888
	9339	1,689	0,197	1,886		9343			
28. Juni	18,8°				1927 MV	18,8°	1,199	0,252	1,451
	1923 MV	1,212	0,239	1,451		1927 MV	1,347	0,198	1,545
	4072	1,305	0,224	1,529		4085	1,934	-0,222	1,712
	6552	1,928	-0,205	1,723		6555	2,322	-0,428	1,894
	9345	2,313	-0,424	1,889		9348			

Tabelle 2b.

Palladiumstab.

<i>t</i>	Σ' (mm)		λ (mm)	
	26. Juni	28. Juni	beob.	ber.
0°			0	0
250	1,476	1,470	1,473	1,475
500	1,611	1,616	3,087	3,082
750	1,729	1,739	4,821	4,821
1000	1,878	1,858	6,680	6,692

1) R. Benoit, Trav. et Mém. du Bureau international 6. p. 1. 1888.

Heizrohr ausgeglüht. Hierbei sind zwischen 250, 500 und 750° für die Ausdehnung die Werte 1,617, 1,720 und 1,840 mm beobachtet. Nach der Abkühlung war eine Verlängerung von 0,024 mm eingetreten, während die bleibenden Aenderungen nach den Beobachtungsreihen der Tabelle jedesmal unter 0,01 mm blieben.

Für die Ausdehnung des Stabes ergibt sich:

$$\lambda_s = 5,636 t + 0,00106 t^2 (\mu),$$

und da die Länge 482,9 mm bei 0° betrug, so folgt:

$$\lambda = \{11670 t + 2,187 t^2\} 10^{-9}.$$

3. Platiniridium (80 Pt, 20 Ir).

Die Beobachtungen an dem Platiniridiumstabe, die in den Tab. 3a und 3b enthalten sind, wurden alle mit dem ersten

Tabelle 3a.
Platiniridiumstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)	
19. Jan.	16,9°				
	1810 MV	0,348	0,595	0,943	
	4198	0,850	0,318	1,168	
	4198	0,636	0,592	1,228	
	6757	{	0,969	0,322	1,291
	9514		1,045	0,276	1,321
	9569		1,043	0,273	1,316
9560					
24. Jan.	17,9°				
	1862 MV	0,675	0,291	0,966	
	4181	0,654	0,462	1,116	
	6708	0,607	0,604	1,211	
	9528	1,163	0,189	1,352	
26. Jan.	18,8°				
	1843 MV	0,557	0,406	0,963	
	4170	0,664	0,456	1,120	
	6705	0,411	0,813	1,224	
	9527	{	1,786	-0,450	1,336
	9539		1,797	-0,463	1,334

Tabelle 3b.

Platiniridiumstab.

t	Σ' (mm)			λ_s (mm)	
	19. Jan.	24. Jan.	26. Jan.	beob.	ber.
0°				0	0
250	1,031	1,033	1,034	1,033	1,033
500	1,130	1,111	1,110	2,150	2,151
750	1,202	1,204	1,213	3,357	3,355
1000	$\begin{cases} 1,277 \\ 1,280 \\ 1,280 \end{cases}$	1,308	$\begin{cases} 1,294 \\ 1,287 \end{cases}$	4,645	4,645

Heizrohr angestellt. Sie waren die ersten, bei denen noch nicht das oben beschriebene Schema überall innegehalten wurde. Nur bei 1000° ist mehr als ein Satz von Ablesungen gemacht. Der Stab, dessen Länge 483,1 mm bei 0° betrug, wurde nur im ausgeglühten Zustande beobachtet. Die berechneten Formeln lauten:

$$\lambda_s = 3,960 t + 0,000685 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{8198 t + 1,418 t^2\} 10^{-9}.$$

4. Silber.

Der Silberstab war 6 mm dick und besass an jedem Ende sieben Teilstriche, die jedoch oft teilweise wegen der grossen Ausdehnung durch die Ofenwand verdeckt waren, sodass sie nicht alle bei jeder Temperatur abgelesen werden konnten. Der Stab wurde zuerst bei 900° ausgeglüht und dehnte sich dabei um 0,13 mm aus. Er war sehr weich geworden und konnte bei hoher Temperatur nur schwer gegen eine kleine Durchbiegung geschützt werden. Aus diesem Grunde wohl und weil die bleibenden Aenderungen auch später grösser als bei den vorhergehenden Stäben waren, weichen die Beobachtungen bei den höheren Temperaturen mehr voneinander ab. Die letzte Beobachtung bei 875° ist bei der Berechnung nicht berücksichtigt. Die Heizung des Silberstabes geschah ebenso, wie bei allen folgenden Metallen, im zweiten Rohr.

Tab. 4a und 4b geben die einzelnen Messungen. Der Stab hat sich nach dem ersten Tage um 0,027, nach dem zweiten um 0,039 mm dauernd gedehnt. Die Länge betrug zum Schluss 484,1 mm. Die Formeln lauten:

$$\lambda_s = 8,844 t + 0,00232 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{18270 t + 4,793 t^2\} 10^{-9}.$$

Tabelle 4a.

Silberstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)		t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
22. Juni	20,2°					20,2°			
	1787 MV	1,216	0,945	2,161		1797 MV	1,252	0,929	2,181
	4088	2,254	0,386	2,640		2,°37	2,°37	0,407	2,644
	6548	2,802	0,096	2,898		6548	2,815	0,073	2,888
23. Juni	20,2°					20,2°			
	1792 MV	0,149	2,325	2,176		1804 MV	0,111	2,304	2,193
	4116	1,905	0,771	2,676		4132	1,873	0,785	2,658
	6516	1,340	1,487	2,827		6581	1,394	1,456	2,850
	7937	1,049	0,603	1,652		7949	1,014	0,637	1,651

Tabelle 4b.

Silberstab.

t	Σ' (mm)		λ_s (mm)	
	22. Juni	23. Juni	beob.	ber.
0°			0	0
250	2,352	2,360	2,356	2,356
500	2,640	2,640	4,996	5,002
750	2,970	2,921	7,941	7,938
875	—	1,649	9,590	9,515

5. Nickel.

Der Nickelstab (6 mm dick) besaß bei den ersten Beobachtungsreihen, die nur bis 750° ausgedehnt wurden, an jedem Ende fünf Striche, die auf einer angefeilten und gut polirten Ebene gezogen waren. Trotzdem das Metall bei dem Erwärmen etwas anließ, waren die Marken immer gut sichtbar,

bis die Heizung am Schluss der dritten Beobachtungsreihe auf 1000° getrieben wurde. Bei dieser Temperatur verschwanden nicht allein die Striche, sondern auch der ganze oxydierte Stab war kaum von der Rohrwandung zu unterscheiden.

Es wurde darauf an jedem Ende ein Platinplättchen (5 × 5 mm) von 0,5 mm Dicke in eine ausgefeilte, schwalbenschwanzförmige Nute eingeschoben. Auf der freien Platinoberfläche, die wieder in die Axe des Stabes zu liegen kam, wurden neue Striche gezogen, die bei den letzten beiden Beobachtungsreihen als Marken dienten. Nimmt man an, dass 1 Proc. der Ausdehnung bei dieser Anordnung von dem Platin herührt, so macht dies bei 750° erst einen Unterschied von 0,01 (5,78 – 3,57) = 0,02 mm.

Tabelle 5a.

Nickelstab.

	<i>t</i>	<i>M</i> (mm)	<i>M'</i> (mm)	Σ (mm)		<i>t</i>	<i>M</i> (mm)	<i>M'</i> (mm)	Σ (mm)
30. Juni	19,1°	1,354	0,227	1,581		19,0°	1,377	0,218	1,595
	1811 MV	1,548	0,407	1,955		1815 MV	1,542	0,415	1,957
	4072	1,257	0,882	2,139		4081	1,261	0,865	2,126
	6551					6561			
2. Juli	19,8°	1,102	0,469	1,571		19,8°	1,142	0,463	1,605
	1803 MV	0,953	0,038	0,991		1815 MV	0,941	0,029	0,970
	2914	0,651	0,330	0,981		2927	0,639	0,343	0,982
	4066	1,286	0,863	2,149		4075	1,306	0,848	2,154
	6551					6563			
4. Juli	20,2°	0,937	0,673	1,609		20,2°	0,958	0,648	1,601
	1793 MV	1,766	0,202	1,968		1799 MV	1,753	0,213	1,971
	4078	1,314	0,822	2,136		4083	1,325	0,814	2,139
	6552					6560			
18. Sept.	17,7°	5,674	-0,005	5,669		17,8°	5,671	-0,013	5,658
	6541 MV	2,591	-0,205	2,386		6537 MV	2,512	-0,222	2,390
	9356					9358			
19. Sept.	18,4°	5,942	-0,271	5,671		18,4°	5,939	-0,275	5,664
	6578 MV	2,495	-0,158	2,337		6578 MV	2,505	-0,179	2,326
	9332					9330			

Tabelle 5b.
Nickelstab.

t	Σ' (mm)					λ , (mm)	
	30. Juni	2. Juli	4. Juli	18. Sept.	19. Sept.	beob.	ber.
0°						0	0
250	1,670	1,678	1,708			1,685	(1,724)
375	1,957	0,975	1,953	5,770	5,748	2,660	2,661
500		0,990				3,643	3,648
750	2,155	2,168	2,164			5,782	5,772
1000	—	—	—	2,313	2,313	8,093	8,096

Die Länge des Stabes betrug bei der ersten Anordnung 482,6 mm bei 0°. Nach Anbringung der Platinplatten war der Abstand der neuen Striche um 0,2 mm grösser. Die letzten Beobachtungen sind deshalb etwas corrigirt. Der Stab hat sich infolge der Heizung immer verkürzt, und zwar um 0,024 und 0,018 mm nach den ersten beiden Reihen, um 0,016 und 0,035 mm nach den letzten.

Die Beobachtungen (Tab. 5a und 5b) lassen sich nur von 375° an durch eine quadratische Formel darstellen. Der Wert bei 250° fällt heraus, wie man sogleich erkennt, wenn man λ/t berechnet. Es ist dies erklärlich, weil das Nickel in der Nähe von 300° eine Zustandsänderung erleidet, mit der die Magnetisierbarkeit aufhört. Unterhalb dieser Temperatur gelten demnach die Formeln

$$\lambda_s = 6,496 t + 0,00160 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{13460 t + 3,315 t^2\} 10^{-9}$$

nicht mehr. Das lineare Glied wird hier kleiner, während das quadratische zunimmt.

6. Constantan (60 Cu, 40 Ni).

Constantan, dessen elektrische Leitfähigkeit und Thermo-electricität sich eigentümlich verhalten, unterscheidet sich in Bezug auf seine Ausdehnung, die ungefähr das Mittel aus den Ausdehnungen der beiden Bestandteile darstellt, nicht wesentlich von anderen Legierungen. Die Sichtbarkeit der Striche,

die direct auf dem 6 mm dicken Stabe gezogen waren, nahm infolge allmählicher Oxydation ab, obwohl die Beobachtungen nur bis 500° ausgedehnt wurden. Die bleibenden Aenderungen des Stabes überschritten nicht 0,01 mm, die Länge bei 0° betrug 483,0 mm.

Tabelle 6a.

Constantanstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)		t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
24. Sept.	17,9°	1,854	-0,023	1,831	17,9°	1821 MV	1,877	-0,057	1,820
	1818 MV	2,215	-0,125	2,090		4036	2,187	-0,100	2,087
	4036								
25. Sept.	17,9°	1,723	0,090	1,813	17,9°	1820 MV	1,750	0,052	1,802
	1815 MV	1,374	-0,348	1,026		2927	1,366	-0,335	1,031
	2917	0,972	0,056	1,028		4011	0,956	0,063	1,019
	4007								

Tabelle 6b.

Constantanstab.

t	Σ' (mm)		λ_s (mm)	
	24. Sept.	25. Sept.	beob.	ber.
0°			0	0
250	1,916	1,903	1,910	1,910
375	2,159	1,040	2,950	2,956
500		1,106	4,063	4,063

Die Ergebnisse (Tab. 6a und 6b) werden durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\lambda_s = 7,156 t + 0,00194 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{14810 t + 4,024 t^2\} 10^{-3}.$$

7. Schmiedeeisen.

Der Stab aus Schmiedeeisen, wie der aus Stahl, wurde sogleich anfangs mit Platinplättchen in derselben Weise versehen, wie es bei Nickel angegeben ist. Infolge der Er-

wärmung trat an dem einen Ende des Eisenstabes eine Vergrößerung eines Intervalls der Teilung um 0,03 mm auf, und zwar zum grössten Teil schon während der ersten Heizung. Die übrigen Marken haben sich nicht merklich verschoben. Die Heizung wurde nur bis 750° ausgedehnt, um dauernde Zustandsänderungen zu vermeiden, wie sie namentlich bei Stahl durch längeres Erhitzen auf höhere Temperaturen eintreten pflegen.

Bekanntlich erfahren die magnetischen Metalle auch eine Längenänderung durch Magnetisierung. Bei Eisen und Stahl würde, entsprechend der schwachen Feldstärke der Heizspule (bei 250° war $H = 30$, bei 500° $H = 42$ für die Mitte des Stabes), eine Verlängerung zu erwarten sein, die höchstens 5×10^{-6} der Länge beträgt¹⁾ und deshalb hier vernachlässigt werden kann.

Tabelle 7a.

Eisenstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)		t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
19. Juli	22,0°					22,0°			
	1841 MV	1,267	0,227	1,494		1847 MV	1,277	0,211	1,488
	4069	1,872	-0,030	1,842		4068	1,857	-0,024	1,833
	6564	1,823	0,170	1,993		6551	1,854	0,129	1,983
21. Juli	22,7°					22,7°			
	1816 MV	1,259	0,207	1,466		1823 MV	1,294	0,166	1,460
	2927	1,266	-0,364	0,902		2930	1,247	-0,349	0,898
	4077	0,987	-0,038	0,959		4077	0,966	-0,014	0,952
25. Juli	6572	1,951	0,039	1,990		6567	2,004	-0,027	1,977
	22,6°					22,6°			
	1803 MV	1,834	0,129	1,463		1807 MV	1,376	0,093	1,469
	4066	2,348	-0,473	1,875		4065	2,305	-0,453	1,852
	5248	0,963	0,016	0,979		5244	0,956	0,036	0,992
	6568	1,188	-0,188	1,000		6569	1,213	-0,211	1,002

1) J. A. Ewing, Magnetische Induction p. 228.

Tabelle 7b.

Eisenstab.

t	Σ' (mm)			λ , (mm)	
	19. Juli	21. Juli	25. Juli	beob.	ber.
0°				0	0
250	1,570	1,565	1,577	1,571	1,571
375	1,890	0,905	1,889	2,476	2,475
500		0,979		3,459	3,459
625	1,967	1,960	0,990	4,449	(4,522)
750			0,964	5,419	(5,664)

Der Eisenstab (6 mm dick) hatte bei 0° eine Länge von 482,7 mm und erfuhr nach den drei Heizungen eine dauernde Aenderung von +0,01, -0,025 und -0,025 mm. Tab. 7a und 7b enthalten die Beobachtungen, die sich bis 500° in befriedigender Weise durch eine Parabel darstellen lassen. Die Gleichungen lauten:

$$\lambda_s = 5,650 t + 0,00254 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{11705 t + 5,254 t^2\} 10^{-9}.$$

Oberhalb 500° wächst die Ausdehnung in geringerem Grade.

8. Stahl.

Um gegen Schmiedeeisen einen möglichst grossen Unterschied zu erhalten, wurde ein kohlenstoffreicher Stahl gewählt. Der 6 mm dicke Stab hatte anfangs eine Länge von 482,8 mm bei 0° und verkürzte sich bei der ersten Heizung um 0,10 mm, während die Aenderungen später 0,01 mm nicht überschreiten.

Die Beobachtungen sind in Tab. 8a und 8b aufgeführt. Legt man durch die Punkte 0, 250 und 500° die Curve

$$\lambda_s = 4,428 t + 0,00402 t^2 (\mu),$$

$$\lambda = \{9173 t + 8,336 t^2\} 10^{-9},$$

so stimmt diese schon mit dem Wert bei 375° nicht gut überein. Die Ausdehnung des Stahles scheint also schon unter 500° unregelmässig zu werden.

Tabelle 8a.

Stahlstab.

	t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)		t	M (mm)	M' (mm)	Σ (mm)
6. Juli	19,7°	0,850	0,436	1,286		19,7°	0,854	0,441	1,295
	1801 MV	1,453	0,400	1,853		1809 MV	1,463	0,397	1,860
	4080	1,431	0,140	1,571		4088	1,435	0,145	1,580
	6535					6540			
16. Juli	20,5°	0,981	0,319	1,300		20,5°	1,007	0,298	1,305
	1824 MV	0,923	-0,047	0,876		1828 MV	0,914	-0,041	0,873
	2909	0,628	0,394	1,022		2913	0,609	0,399	1,008
	4150					4141			
17. Juli	22,2°	1,080	0,204	1,284		22,2°	1,108	0,173	1,281
	1818 MV	1,613	0,229	1,842		1817 MV	1,595	0,236	1,831
	4062	0,555	0,445	1,000		4060	0,550	0,443	0,993
	5274	0,611	0,090	0,701		5269	0,640	0,076	0,716
	6556								

Tabelle 8b.

Stahlstab.

t	Σ' (mm)			λ (mm)	
	6. Juli	16. Juli	17. Juli	beob.	ber.
0°				0	0
250	1,361	1,360	1,857	1,359	(1,359)
375	1,866	0,896	1,871	2,255	(2,227)
500		0,953		3,221	(3,221)
625	1,582	—	0,979	4,200	(4,341)
750			0,704	4,904	(5,586)

(Eingegangen 7. November 1900.)

**7. Ueber die Unregelmässigkeiten
Weston'scher Cadmiumelemente mit 14,3 proc.
Amalgam in der Nähe von 0°;
von W. Jaeger.**

(Mittheilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Eine kürzlich erschienene Arbeit von Hrn. H. T. Barnes¹⁾ über Untersuchungen, die er an Cadmiumelementen (mit 14,3 proc. Amalgam) angestellt hat, giebt mir im Zusammenhang mit anderen Angriffen, welche diese Elemente erfahren haben²⁾, Veranlassung, meine bisher nicht veröffentlichten Versuchsreihen über das unregelmässige Verhalten von Cadmiumelementen (mit 14,3 proc. Amalgam) in der Nähe von 0° aus dem Jahre 1896³⁾ hier mitzuteilen und bei dieser Gelegenheit einige nicht zutreffende Bemerkungen und Anschauungen über die Elemente und die Veröffentlichungen der Reichsanstalt richtig zu stellen.

Auf die betreffenden Unregelmässigkeiten der Cadmiumelemente ist zuerst von Wachsmuth und von mir hingewiesen worden⁴⁾; nach Aufstellung der Temperaturformel für das Cadmiumelement wurde (l. c. p. 583) geschrieben: „diese Formel gilt nach ihrer Ableitung zwischen 0° und 26°, doch haben spätere Beobachtungen gezeigt, dass einige Elemente sich zwischen 0° und etwa 5° in der Weise unregelmässig verhalten, dass ihre elektromotorische Kraft bedeutend (etwa $\frac{1}{1000}$ Volt) grösser ist, als diejenige der anderen Elemente. Den Grund für diese auffällige Erscheinung zu finden, muss einer späteren

1) H. T. Barnes, Journ. of phys. Chem. 4. p. 339. 1900.

2) E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem. 34. p. 621. 1900. Vgl. auch die vorläufige Erwiderung darauf: W. Jaeger u. St. Lindeck, l. c. 35. p. 98. 1900 und Ann. d. Phys. 3. p. 366. 1900.

3) Vgl. Tätigkeitsbericht der Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 17. p. 143. 1897.

4) W. Jaeger u. R. Wachsmuth, Wied. Ann. 59. p. 575. 1896.

Untersuchung vorbehalten bleiben. Beim Erwärmen auf Zimmer-temperatur zeigen aber auch diese Elemente wieder die normale elektromotorische Kraft. Der Bereich der obigen Formel ist daher vorläufig auf die Temperaturen zwischen 25° bis oberhalb 5° zu beschränken“.

Nach den heute vorliegenden Erfahrungen erreichen die Abweichungen bei 0° zum Teil den Betrag von über 2 Millivolt, doch stimmen alle Elemente bereits bei $+10^{\circ}$ bis auf wenige zehntel Millivolt mit der von uns aufgestellten Formel überein. Die obige Aeusserung ist also auch heute noch zutreffend. Für den praktischen Gebrauch der Elemente in Wissenschaft, wie Technik, sind zur Zeit Abweichungen von wenigen Zehntausendsteln meistens völlig belanglos; ausserdem ist man ja nicht gezwungen, bei 10° zu beobachten.

Hr. E Cohen vermutete als Grund dieser Unregelmässigkeiten eine Umwandlung des Cadmiumsulfates, wie sie in analoger Weise beim Zinksulfat vorhanden ist¹⁾ und fand in der That durch Löslichkeitsbestimmung des Cadmiumsulfats ($\text{CdSO}_4, \frac{8}{3} \text{H}_2\text{O}$) in Gemeinschaft mit Hrn. Ph. Kohnstamm²⁾ einen Umwandlungspunkt bei 15° , der auch durch dilatometrische Messung bestätigt wurde. Neuerdings fand Hr. Cohen (l. c.) jedoch als Ursache der Unregelmässigkeiten das Verhalten des Cadmiumamalgams. Diese Thatsache scheint Hrn. Barnes bei Abfassung seiner Mitteilung noch nicht bekannt gewesen zu sein.

Hr. Barnes geht aus von diesen Untersuchungen über die Umwandlung des Cadmiumsulfates und bemerkt dann, anknüpfend an unsere oben citirte Aeusserung: „No idea can be obtained from the experiments of Jaeger and Wachsmuth as to the position of this important transition point, on account of the method they used of determining the temperature change, but it is a matter of very little difficulty to employ the Weston cell as a transition cell of the fourth type, in a manner similar to the Clark cell.“

In der That besteht keine Schwierigkeit, das Cadmium-element in dieser Weise zu benutzen und dass dies in der

1) Vgl. z. B. E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem. 14, p. 53, 535. 1894.

2) Ph. Kohnstamm u. E. Cohen, Wied. Ann. 65, p. 314. 1898.

Reichsanstalt vor längerer Zeit geschehen ist, geht aus dem Schlusspassus in meiner Mitteilung über die Umwandlungserscheinungen beim Clarkelement¹⁾ hervor (p. 365): „Ähnliche Erscheinungen wie die hier beschriebenen (Umwandlung von Elementen, Doppelcurve der elektromotorischen Kraft), wurden auch an Cadmiumelementen beobachtet; diese waren sogar die Veranlassung zu den vorliegenden Versuchen. Bei den Clarkelementen lagen nämlich die Verhältnisse klarer, da bereits der Umwandlungspunkt des Zinksulfathydrates und seine beiden Modificationen bekannt waren, für das Cadmiumsulfat dagegen nicht. Man konnte dann aus dem hier Gefundenen Analogieschlüsse auf das Cadmiumelement machen. Die mit diesem Element erhaltenen Resultate sollen bei einer anderen Gelegenheit mitgeteilt werden.“

Nachdem Hr. Barnes seine Beobachtungen über die Umwandlung des Cadmiumelementes veröffentlicht hat, will ich auch meine Zahlen nicht länger zurückhalten, obwohl die Erscheinungen beim Cadmiumelement noch immer der Aufklärung bedürfen. Auf einige andere Bemerkungen von Hrn. Barnes werde ich weiter unten zurückkommen.

Ich bemerke noch ausdrücklich, dass sich sowohl die Messungen der Herren Barnes und Cohen wie die nachstehenden aus dem Jahre 1896 auf Elemente mit 14,3proc. Cadmiumamalgam beziehen, mit dem unsere ersten Elemente zusammengesetzt waren. Es wird öfter hervorgehoben, dass dieses Amalgam von uns empfohlen wird, doch mache ich demgegenüber darauf aufmerksam, dass ich nach der Untersuchung der Cadmiumamalgame²⁾ (p. 110) ausgesprochen habe: „Für Cadmiumelemente empfiehlt es sich, ein etwas verdünnteres Amalgam zu nehmen, als $\frac{1}{10}$ (= 14,3 Proc.), da dieses schon nahe an der Umbiegung der Curve liegt.“ Etwas concentrirtere Amalgame zeigen nämlich schon bei Zimmertemperatur eine Veränderung ihres elektromotorischen Verhaltens; deshalb werden zur Zeit in der Reichsanstalt Amalgame mit ca. 13 Proc. Cd benutzt.

1) W. Jaeger, Wied. Ann. 63. p. 354. 1897. Dieselbe Untersuchung ist später von Hrn. Barnes (Journ. phys. Chem. 4. p. 1. 1900) mit übereinstimmendem Resultat durchgeführt worden.

2) W. Jaeger, Wied. Ann. 65. p. 106. 1898.

Da die Erscheinungen beim Cadmiumelement zwar eine gewisse Aehnlichkeit mit den Umwandlungserscheinungen beim Clarkelement zeigen, andererseits aber davon wesentlich abweichen, will ich kurz auf die letzteren zurückkommen. Wie aus Fig. 1¹⁾ hervorgeht, kann das Clarkelement unterhalb des Umwandlungspunktes des Zinksulfates (39°) zwei Zustände I und II annehmen, während oberhalb 39° nur der Zustand II

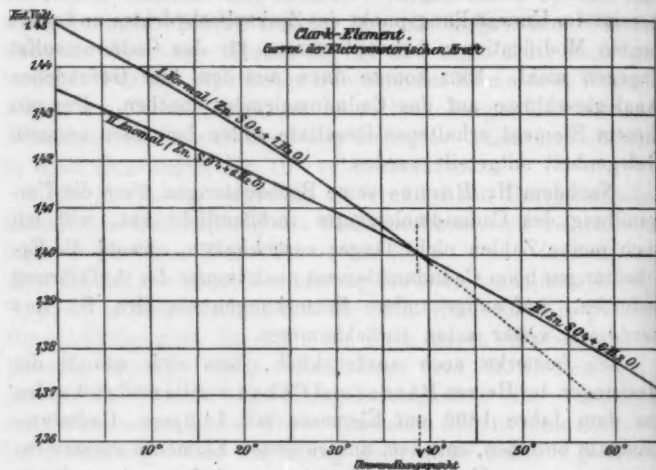


Fig. 1.

($\text{ZnSO}_4, 6\text{H}_2\text{O}$ entsprechend) zu beobachten ist. Ein auf der Curve II unterhalb 39° befindliches Element kann durch Einwerfen eines Krystalles von $\text{ZnSO}_4, 7\text{H}_2\text{O}$ in den Zustand I zurückgeführt werden. Betrachtet man nur das Element mit $\text{ZnSO}_4, 7\text{H}_2\text{O}$, so erleidet seine Curve bei 39° einen Knick; der Umwandlungspunkt ist durch diesen Knick, sowie durch Beobachtung des Zustandes II unterhalb 39° genau festzustellen und stimmt mit dem anderweitig (durch Löslichkeits-Widerstands- oder Dilatometermessung) bestimmten Umwandlungspunkt überein.²⁾

1) W. Jaeger, Wied. Ann. 63. p. 355. 1897.

2) E. Cohen, Zeitschr. f. phys. Chem 31. p. 169. 1899.

Für die beiden Zustände konnten Temperaturformeln aufgestellt werden; unterhalb 39° ist Zustand I der stabile, Zustand II der metastabile.

Die Erwartungen, beim Cadmiumelement analoge Erscheinungen zu finden, haben sich nicht erfüllt; auch die Zahlen und Curven von Hrn. Barnes entsprechen dieser Erwartung nicht, obwohl er in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Kohnstamm und Cohen an Cadmiumsulfat bei 15° einen Umwandlungspunkt gefunden zu haben glaubt.

Es steht indessen jetzt auch nach Versuchen in der Reichsanstalt fest, dass die hier betrachteten Erscheinungen beim Cadmiumelement nichts mit der Umwandlung des Cadmiumsulfates zu thun haben; auch müsste man sonst wie beim Clark-element zwei scharf ausgeprägte Curven der elektromotorischen Kraft unterhalb 15° finden.

Ich gehe nun zunächst auf meine Versuche ein. Einige Elemente habe ich in dem Intervall vom Gefrierpunkt der gesättigten Lösung des Cadmiumsulfates (ca. -16°) bis über $+40^{\circ}$ eingehend bei auf- und absteigender Temperatur untersucht, um einerseits die früher aufgestellte Temperaturformel zu prüfen, andererseits die Unregelmässigkeiten näher zu studiren. Ausserdem habe ich alle mir damals zur Verfügung stehenden Cadmiumelemente (34 an der Zahl) bei 0° durchgemessen, um zu sehen, in welchen Grenzen sich die Abweichungen bei dieser Temperatur bewegen. Von diesen Elementen waren vierzehn (Nr. 311, 312, 313, 314, 317, 323, 330, 352, 359, 373, 376, 377, 378, 381) normal, das heisst ihre elektromotorische Kraft bei 0° unterschied sich nicht mehr als zwei Zehntausendstel von dem durch die Formel angegebenen Wert. Die übrigen zwanzig Elemente zeigten Abweichungen, ansteigend bis über 2 Millivolt und zwar in dem Sinne, dass ihre elektromotorische Kraft grösser war, als der Formel entspricht. Die folgende Zusammenstellung (Tab. 1) enthält die Abweichungen vom Formelwert in Millivolt. Bei der Messung standen die Elemente in Petroleum, welches durch Eis auf 0° abgekühlt wurde. Die angegebenen Zahlen sind erhalten beim Aufenthalt der Elemente bei 0° nach einigen Stunden.

Tabelle 1.
Abweichung bei 0°.

Nr.	Mikrovolt	Nr.	Mikrovolt	Nr.	Mikrovolt	Nr.	Mikrovolt
366	+ 0,2	355	+ 0,6	330	+ 1,0	350	+ 1,3
360	+ 0,2	320	+ 0,7	360	+ 1,1	354	+ 1,3
364	+ 0,3	316	+ 0,7	368	+ 1,1	324	+ 1,3
315	+ 0,3	358	+ 0,9	331	+ 1,3	328	+ 1,5
361	+ 0,3	363	+ 0,9	340	+ 1,3	345	+ 2,3

Ausser dem durch die Formel gegebenen Zustand des Elementes bei 0°, dem eine Anzahl von Elementen entsprechen, giebt es also noch eine Reihe anderer Zustände, die continuirlich ineinander überzugehen scheinen. Von zwei Zuständen, einem stabilen und metastabilen, kann man somit bei diesem Element nicht reden. Dies wird auch durch die folgenden Beobachtungen bestätigt.

Die Elemente Nr. 316, 319 und 368 wurden im October 1896, zwischen -16° und +40°, eingehend gemessen. Die Untersuchung geschah in der Weise, dass die Elemente verglichen wurden mit einem in Petroleum von Zimmertemperatur stehenden Element (Nr. 312). Die zu untersuchenden Elemente befanden sich ebenfalls in Petroleum; die Einrichtung und Messmethode war ganz dieselbe, wie sie bei den entsprechenden Versuchen über das Clarkelement (l. c.) beschrieben sind. Das Element Nr. 319, welches sich normal verhielt, war stets mit einem der abweichenden Elemente in demselben Bade, um dadurch eine Controle für die Richtigkeit der Temperatur zu erhalten. Die Temperatur des Elementes Nr. 312 schwankte zwischen 16° und 20°; die Differenzen der untersuchten drei Elemente gegen Nr. 312 sind auf eine Temperatur des letzteren von 20° C. reducirt. Die in den folgenden Tabellen als „berechnet“ in Millivolt angegebenen Differenzen sind aus der von uns (l. c.) aufgestellten Temperaturformel

$$E_t = E_{20} - 0,000038 (t - 20^\circ) - 0,00000065 (t - 20^\circ)^2$$

abgeleitet. In der letzten Spalte sind die Abweichungen der Elemente (Beobachtete-Berechnete Differenz) eingetragen, aus denen man sieht, ob das Element sich normal verhält oder nicht.

Tabelle 2.

Lfde. Nr.	Datum	Zeit	Temp.	Differenz gegen 20° (MV.)		Ab- weichung (MV.)
				beob.	ber.	
Cadmiumelement Nr. 319.						
1	23. X. 96	12 ^h 25 ^m	+ 8,0°	+ 0,43	+ 0,36	+ 0,07
2	"	2 45	+ 5,8	+ 0,43	+ 0,41	+ 0,02
3	24. X. 96	11 30	+ 4,0	+ 0,52	+ 0,44	+ 0,08
4	"	1 13	+ 2,0	+ 0,45	+ 0,47	- 0,02
5	"	2 13	+ 0,5	+ 0,49	+ 0,49	0
6	26. X. 96	—	+ 16,2	+ 0,16	+ 0,13	+ 0,03
7	"	12 47	0	+ 0,52	+ 0,50	+ 0,02
8	"	2 0	- 16,0	+ 0,76	+ 0,54	+ 0,22
9	"	3 0	- 15,5	+ 0,50	+ 0,54	- 0,04
10	"	5 43	- 13,7	+ 0,33	+ 0,54	- 0,21
11	"	9 15	- 11,5	- 0,02	+ 0,55	- 0,57
12	27. X. 96	—	+ 20,0	0	0	0
13	28. X. 96	—	+ 18,0	+ 0,08	+ 0,07	+ 0,01
14	"	2 45	- 7,8	+ 0,69	+ 0,55	+ 0,14
15	"	6 30	- 7,0	+ 0,44	+ 0,55	- 0,11
16	29. X. 96	10 0	- 3,9	+ 0,41	+ 0,53	- 0,12
17	"	12 50	0	+ 0,33	+ 0,50	- 0,17
18	"	1 35	+ 17,2	+ 0,10	+ 0,10	0
19	"	2 04	- 18,5	+ 0,71	+ 0,54	+ 0,17
20	"	8 45	+ 17,0	+ 0,08	+ 0,10	- 0,02
21	30. X. 96	—	- 7,8	+ 0,42	+ 0,55	- 0,13
22	"	12 15	+ 16,0	+ 0,14	+ 0,14	0
23	"	1 25	- 12,0	+ 0,59	+ 0,55	+ 0,04
24	"	2 10	- 11,0	+ 0,59	+ 0,55	+ 0,04
25	31. X. 96	—	- 1,2	+ 0,43	+ 0,52	- 0,09
26	"	12 0	+ 10,5	+ 0,30	+ 0,30	0
27	"	1 12	+ 28,0	- 0,39	- 0,34	- 0,05
28	"	2 25	+ 34,0	- 0,68	- 0,66	- 0,02
29	"	2 40	+ 42,0	- 1,15	- 1,15	0
30	"	2 55	+ 41,7	- 1,25	- 1,10	- 0,15
31	2. XI. 96	—	+ 17,5	+ 0,10	+ 0,09	+ 0,01
32	"	11 45	0	+ 0,54	+ 0,50	+ 0,04

Tabelle 3.

Lfde. Nr.	Datum	Zeit	Temp.	Differenz gegen 20° (MV.)		Ab- weichung (MV.)
				beob.	ber.	

Cadmiumelement Nr. 316.

1	21. X. 96	—	+ 14,0°	+ 0,22	+ 0,20	+ 0,02
2	"	—	+ 10,8	+ 0,30	+ 0,30	0
3	22. X. 96	—	+ 10,4	+ 0,55	+ 0,31	+ 0,24
4	"	—	+ 20,0	+ 0,06	0	+ 0,06
5	"	—	+ 12,0	+ 0,43	+ 0,26	+ 0,17
6	"	—	+ 8,0	+ 0,81	+ 0,36	+ 0,45
7	23. X. 96	9 ^h 30 ^m	+ 17,5	+ 0,13	+ 0,09	+ 0,04
8	"	12 20	+ 8,0	+ 0,70	+ 0,36	+ 0,34
9	"	2 50	+ 5,8	+ 0,92	+ 0,41	+ 0,51
10	24. X. 96	—	+ 15,2	+ 0,21	+ 0,16	+ 0,05
11	"	11 30	+ 4,4	+ 1,20	+ 0,43	+ 0,77
12	"	12 41	+ 2,0	+ 1,61	+ 0,47	+ 1,14
13	"	1 20	+ 2,2	+ 1,45	+ 0,47	+ 0,98
14	"	1 55	+ 0,6	+ 1,60	+ 0,49	+ 1,11
15	"	2 12	+ 0,6	+ 1,51	+ 0,49	+ 1,02
16	26. X. 96	—	+ 16,2	+ 0,17	+ 0,14	+ 0,03
17	"	12 47	0	+ 1,60	+ 0,50	+ 1,10
18	"	2 0	— 16,0	+ 5,08	+ 0,54	+ 4,49
19	"	3 0	— 15,5	+ 4,24	+ 0,54	+ 3,70
20	"	5 30	— 13,7	+ 3,21	+ 0,54	+ 2,67
21	"	9 15	— 11,5	+ 2,21	+ 0,55	+ 1,66
22	27. X. 96	—	+ 20,0	0	0	0
23	28. X. 96	1 30	+ 18,0	+ 0,13	+ 0,07	+ 0,06
24	"	2 45	— 7,8	+ 0,53	+ 0,55	— 0,02
25	"	6 30	— 7,0	+ 0,63	+ 0,55	+ 0,08
26	29. X. 96	10 0	— 3,8	+ 0,75	+ 0,53	+ 0,22
27	"	1 35	+ 17,2	+ 0,05	+ 0,10	— 0,05
28	30. X. 96	12 15	+ 16,0	+ 0,19	+ 0,14	+ 0,05
29	31. X. 96	11 0	— 1,7	+ 0,81	+ 0,52	+ 0,29
30	3. XI. 96	11 0	0	+ 0,44	+ 0,50	— 0,06
31	4. XI. 96	11 0	+ 17,2	+ 0,12	+ 0,10	+ 0,02

Tabelle 4.

Lfde. Nr.	Datum	Zeit	Temp.	Differenz gegen 20° (MV.)		Ab- weichung (MV.)
				beob.	ber.	
Cadmiumelement Nr. 368.						
1	29. X. 96	12 ^h 19 ^m	- 3,5 ^o	+ 3,41	+ 0,53	+ 2,88
2	"	1 50	0	+ 2,71	+ 0,50	+ 2,21
3	"	1 55	- 18,5	+ 3,74	+ 0,54	+ 3,20
4	"	8 45	+ 17,0	+ 0,24	+ 0,10	+ 0,14
5	30. X. 96	9 55	- 7,2	+ 2,74	+ 0,55	+ 2,19
6	"	12 15	+ 16,0	+ 0,38	+ 0,14	+ 0,24
7	"	1 25	- 12,0	+ 2,71	+ 0,54	+ 2,17
8	"	2 10	- 11,0	+ 2,82	+ 0,55	+ 2,27
9	31. X. 96	—	- 1,2	+ 2,24	+ 0,51	+ 1,73
10	"	11 45	+ 10,5	+ 0,60	+ 0,30	+ 0,30
11	"	1 12	+ 28,2	- 0,27	- 0,35	+ 0,08
12	"	2 25	+ 38,5	- 0,51	- 0,62	+ 0,11
13	"	2 35	+ 42,0	- 0,90	- 1,15	+ 0,25
14	"	2 55	+ 41,7	- 1,24	- 1,10	- 0,14
15	2. XI. 96	—	+ 17,5	+ 0,10	+ 0,09	+ 0,01
16	"	11 45	0	+ 0,49	+ 0,50	- 0,01

In den folgenden Figg. 2, 3, 4 sind die beobachteten Werte aus den obenstehenden Tabellen mit Angabe der laufenden Nummer des Versuches eingetragen¹⁾, gleichzeitig ist die aus der Formel berechnete Curve eingezeichnet.

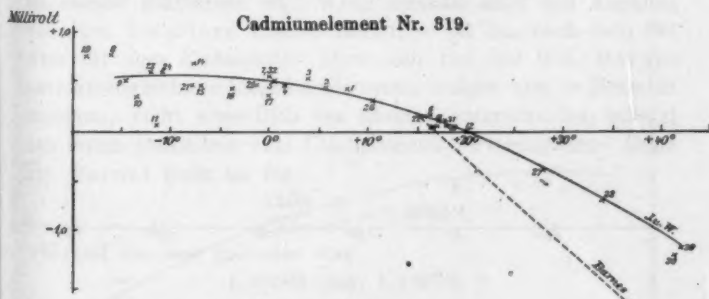


Fig. 2.

1) Mit Ausnahme von Nr. 18 für Element Nr. 316.

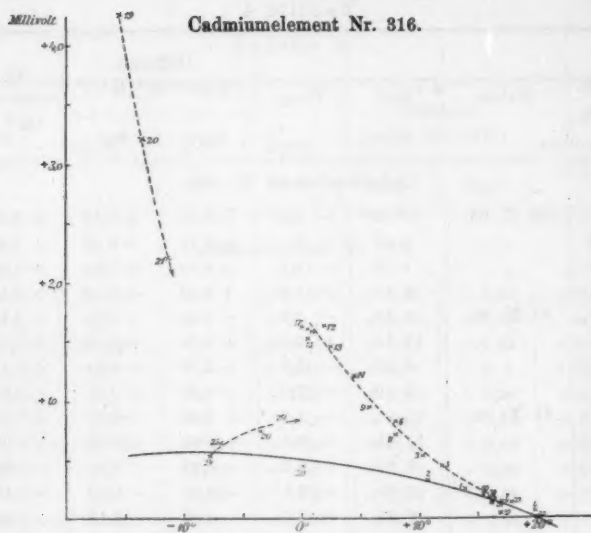


Fig. 3.

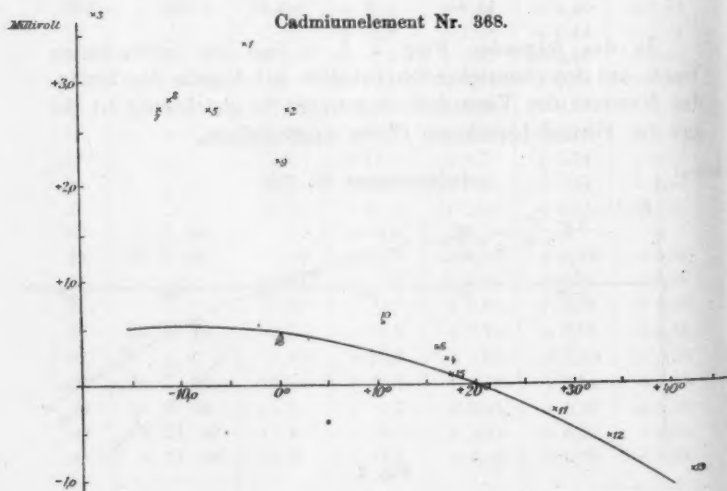


Fig. 4.

Man sieht nun zunächst aus Fig. 2, dass Element Nr. 319 die Temperaturcurve, welche nur zwischen 0° und 26° aufgestellt war, sogar von -16° bis $+40^{\circ}$ bestätigt. Man muss dabei ausschliessen die Versuche bei tiefer Temperatur vom 26. October (8 bis 11), bei welchen durch Abkühlung unter -16° das Kryohydrat des Cadmiumsulfates entstanden war. In solchen Fällen war mehrmals eine starke stetige Abnahme der elektromotorischen Kraft des Elementes beobachtet worden; doch wurde dieses bei Zimmertemperatur stets wieder normal. Die von Hrn. Barnes (l. c.) aufgestellte Temperaturformel für das Cadmiumelement

$$E_t = E_{15} - 0,000\,086(t - 15^{\circ}),$$

welche oberhalb 15° gelten soll und mit unseren Versuchen unvereinbar ist, ist in Fig. 2 ebenfalls eingezeichnet. Hr. Barnes beanstandet (p. 341) an unserem Beobachtungsmaterial, dass nur wenige Versuche bei 26° angestellt wurden und hält die Uebereinstimmung zwischen Berechnung unterhalb 15° für zufällig. Demgegenüber möchte ich bemerken, dass die betreffenden Untersuchungen von Hrn. Wachsmuth und mir mit der grössten Sorgfalt ausgeführt worden sind. Wie a. a. O. angeführt, sind nicht alle Beobachtungszahlen mitgeteilt worden, da sie stets identisch dasselbe ergab; auch die vorliegenden Messungen zeigen ja wieder die Richtigkeit der damaligen Beobachtungen. Es ist mir daher unerklärlich, wodurch die abweichende Temperaturformel von Hrn. Barnes zu stande gekommen ist. Wenn dieselbe auch mit Angaben von Hrn. Dearlove übereinstimmt, so ist das noch kein Beweis für ihre Richtigkeit. Dass sich die von Hrn. Barnes zusammengesetzten Cadmiumelemente, welche hier in Betracht kommen, nicht wesentlich von unseren unterscheiden, scheint aus ihrem Verhältnis zum Clarkelement hervorzugehen. Denn Hr. Barnes giebt an für

$$\frac{\text{Clark } 15}{\text{Cadm. } 20^{\circ}} = 1,40658,$$

während von uns gefunden war

$$1,40663 \text{ (bez. } 1,40679\text{).}^1)$$

1) W. Jaeger u. K. Kahle, Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 161. 1898; Wied. Ann. 65. p. 926. 1898 bez. St. Lindeek, Thätigkeitsbericht der Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. 20. p. 176. 1900.

Was ferner die beiden abweichenden Elemente betrifft (Figg. 3 und 4), so stimmen dieselben auch nach Abkühlungen auf -20° bei $+10^{\circ}$ schon wieder auf einige Zehntausendstel mit dem Formelwert, können also von dieser Temperatur an unbedenklich zu allen Messungen benutzt werden.

Damit fällt auch die Behauptung von Hrn. Cohen, dass die Cadmiumelemente unterhalb 23° als Normalelemente unbrauchbar seien.

Wie sich neuerdings herausgestellt hat und mir auch von Hrn. Cohen privatim freundlichst mitgeteilt wurde, verlangen seine Versuche zum Teil eine andere als die früher gegebene Auslegung; der von ihm als metastabil bezeichnete Zustand ist gerade der stabile und die von uns aufgestellte Temperaturformel bezieht sich somit auf diesen stabilen Zustand. Die Abweichungen mancher Elemente mit 14,3 proc. Amalgam bleiben trotzdem bestehen und hängen offenbar mit Veränderungen des Cadmiumamalgams zusammen. Doch sind dadurch auch diese Elemente nicht unbrauchbar, solange man über 10° bleibt.

Auf Grund der bis jetzt bekannten Erscheinungen waren Hr. Lindeck und ich auf die Vermutung gekommen, dass die neueren, mit 13 proc. Amalgam hergestellten Elemente diese Unregelmässigkeiten viel weniger zeigen würden. Dies hat sich in der That bestätigt. Unsere ausgedehnten Versuche über Clark- und Cadmiumelemente bei verschiedenen Temperaturen sind bald abgeschlossen und sollen demnächst veröffentlicht werden. Diese Messungen bestätigen ebenfalls die im Vorstehenden enthaltenen Auseinandersetzungen.

Die Untersuchung der Elemente Nr. 316 und 319 bei tiefer Temperatur ergaben noch einige interessante Erscheinungen, die eine gewisse Analogie mit den Umwandlungsvorgängen beim Clarkelement zeigen.

Die elektromotorische Kraft des Elementes Nr. 316 bewegt sich bei den ersten Messungen (1 und 2) auf der normalen Curve, später aber (3 bis 17) auf einer stark abweichenden, die bei 0° eine Differenz von etwa 1,5 Millivolt gegen die normale ergibt. Nach einer stärkeren Erwärmung auf ca. 40° befindet sie sich am 28. October unterhalb 0° wieder auf der normalen Curve (24), um sich dann langsam wieder dem

abweichenden Zustand (25, 26, 29) zu nähern; dazwischen war das Element auf Zimmertemperatur gewesen (27 und 28). Nach einer abermaligen starken Erwärmung war es dann am 3. November wieder bei 0° normal (30), ging jedoch später wieder in den abweichenden Zustand über. Auch bei diesem Element zeigt sich, wie bei Nr. 319 nach einer Abkühlung desselben unter den Gefrierpunkt der Cadmiumsulfatlösung (-16°), in diesem Fall auf -18° , ein starker Abfall der elektromotorischen Kraft (18 bis 21). Das Element Nr. 368 verhielt sich ähnlich; man muss bei der Betrachtung desselben berücksichtigen, dass seine elektromotorische Kraft durchschnittlich um ca. ein Zehntausendstel grösser ist, als die des Vergleichselementes Nr. 312 und muss diesen Betrag von den Abweichungen in Abrechnung bringen. Im allgemeinen weicht seine elektromotorische Kraft bei tieferen Temperaturen beträchtlich von der normalen Curve ab; dagegen ist es nach einer Erwärmung auf ca. 40° bei 0° normal geworden (16). Bei 10° unterscheidet es sich, wie Element Nr. 316 nur noch um wenige Zehntausendstel von normalen Elementen und befolgt die normale Curve ebenfalls noch über 30° hinaus. Die Abweichungen unterhalb 0° sind zu verschiedenen Zeiten so unregelmässig, dass sich keine Curve durch dieselben legen lässt.

Es ist also trotz der Aehnlichkeit der Erscheinungen mit denen beim Clarkelement hier nicht gelungen, eine zweite Curve zu finden, sondern es zeigen sich bei einer Anzahl von Elementen unregelmässige Abweichungen vom normalen Zustand. Ebenso wenig ergeben die Curven von Hrn. Barnes diese zweite Curve; es ist augenscheinlich, dass die Abweichungen nichts mit der Umwandlung des Cadmiumsulfates zu thun haben. Auch sind die Aenderungen in der Löslichkeit des umgewandelten Salzes so minimal, dass sie wohl nicht zur Erklärung dieser starken Abweichungen herangezogen werden können. Dieser Ansicht ist auch Hr. Cohen (l. c.); die Abweichungen sind vielmehr auf Rechnung des 14,3 proc. Cadmiumamalgams zu setzen, das irgend welche unregelmässige Zustandsänderungen bei der Abkühlung erfährt, wahrscheinlich in analoger Weise, wie die concentrirteren Amalgame schon bei Zimmertemperatur sich verändern. Jedenfalls verläuft die Aenderung in demselben Sinne.

Mit Rücksicht auf die Veränderung, welche Hr. Cohen (l. c.) an einem 14,3 proc. Cadmiumamalgam beobachtet hatte, unterzieht er¹⁾ eine Veröffentlichung des Hrn. Marek²⁾ einer Kritik, welche nach Vorstehendem einer wesentlichen Modification bedarf. Hr. Marek berechnete nach den von der Reichsanstalt aufgestellten Formeln zum Gebrauch in Laboratorien Tabellen für die elektromotorische Kraft der Clark- und Cadmiumelemente von 0° bis 30°. Hr. Cohen bemerkt nun, dass die Tabelle für das Cadmiumelement nur von 23 bis 26° Gültigkeit habe. Nach dem Vorstehenden kann man dagegen das Gültigkeitsbereich der Formel von + 10° bis über 30° festsetzen. Hr. Cohen dehnt seine Behauptung auch auf die Elemente der European Weston Electrical Instrument Co. aus. Da diese Firma indessen Amalgam von 12,5 Proc. benutzt³⁾, so wäre diese Behauptung nur dann zutreffend, wenn die Unregelmässigkeiten bei 0° auch für dieses Amalgam nachgewiesen sind. Nach den neuerdings in Gemeinschaft mit Hrn. Lindeck angestellten Versuchen scheinen aber verdünntere Amalgame von diesen Unregelmässigkeiten bei 0° frei zu sein. Es bleibt also vorläufig nur das bestehen, dass bei Präcisionsmessungen Cadmiumelemente mit 14,3proc. Amalgam nicht unter + 10° gebraucht werden sollen.

Charlottenburg, den 6. November 1900.

1) E. Cohen, Ann. d. Phys. 2. p. 863. 1900.

2) W. Marek, Ann. d. Phys. 1. p. 617. 1900.

3) Vgl. z. B. W. Jaeger, Centralblatt für Accumulatoren- und Elementenkunde 1. p. 3. 1900.

(Eingegangen 9. November 1900.)

**8. Beiträge zur Kenntnis
der Vorgänge in Inductionsapparaten;
von K. R. Johnson.**

(Fortsetzung von p. 744. Bd. 3. 1900.)

Der beim Schliessen inducirte secundäre Strom.

Wie oben gesagt, rühren die wichtigsten Wirkungen des Inductoriums fast ausschliesslich von dem zweiten (d. h. dem vom Oeffnungsstrom inducirten) secundären Strome her, und den ersten Inductionsstrom haben wir deshalb bisher vernachlässigt. Jedoch erhält man auch vom ersten Inductionsstrom Funkenentladungen, wenn nur die Funkenstrecke kurz genug genommen wird. Diese Entladungen, obwohl sie unbedeutend gegenüber denjenigen des zweiten Stromes sind, haben jedoch ein besonderes theoretisches Interesse, und der erste Strom soll daher etwas näher besprochen werden.

Vor dem Schliessen des primären Stromkreises ist der Condensator zu einer Potentialdifferenz, die der elektromotorischen Kraft der Batterie genau gleich ist, geladen. Beim Schliessen wird der Condensator durch die Oeffnungsstelle entladet, und die Entladung findet deswegen grösstenteils in einer Strombahn, die fast ausschliesslich von den Zuleitungsdrähten des Condensators entsteht, statt. Diese Strombahn besitzt somit nur einen sehr kleinen Widerstand w und eine sehr kleine Selbstinduction λ . Für diese Entladung erhält man somit die Gleichungen:

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda \frac{di}{dt} + wi = e, \\ j_1 - i = C_1 \frac{de}{dt}, \end{cases}$$

wo i die Stromstärke in der kurzen Strombahn der Oeffnungsstelle, j_1 diejenige in der primären Spule, und e die Potentialdifferenz des Condensators zur Zeit t bedeuten. C_1 bezeichnet wie oben die Capacität des primären Condensators. Zu den

obigen Gleichungen kommen die folgenden, die sich auf die gegenseitige Wirkung der beiden Spulen beziehen:

$$(23) \quad \begin{cases} L_1 \frac{dj_1}{dt} + M \frac{dj_2}{dt} + W_1 j_1 = E_0 - e, \\ L_2 \frac{dj_2}{dt} + M \frac{dj_1}{dt} + W_2 j_2 = 0, \end{cases}$$

wo j_2 die Stromstärke in der secundären Spule zur Zeit t bezeichnet. Die Bedeutung der Constanten L_1 , L_2 , M , W_1 , W_2 und E_0 sind schon oben angegeben worden.¹⁾ Die Ladung des Condensators sinkt vom Anfangswert E_0 bis beinahe zu Null herab, und die Verzögerung dieses Herabsinkens, die von dem Strome j_1 bewirkt wird, soll hier vernachlässigt werden.²⁾ Dementsprechend wird j_1 aus der zweiten Gleichung (22) ausgelassen, und bei Integriren ergibt sich somit aus den Gleichungen (22)

$$(24) \quad e = e^{-qt}(A \cos pt + B \sin pt),$$

wo

$$q = \frac{w}{2\lambda} \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{1 - C_1 \frac{w_2}{4\lambda}}}{\sqrt{\lambda C_1}}.$$

Zur Zeit $t=0$, d. h. beim Schliessen des primären Stromes, hat man $i=0$ und $e=E_0$, und dadurch werden die Integrationsconstanten $A=E_0$ und $B=p/q \cdot E_0$ bestimmt. Aus der Gleichung (24) ergibt sich somit

$$(25) \quad e = E_0 e^{-qt} \left(\cos pt + \frac{p}{q} \sin pt \right) = E_0 f(t)$$

und die Gleichungen (23) kann man demnach

$$(26) \quad \begin{cases} L_1 \frac{dj_1}{dt} + M \frac{dj_2}{dt} + W_1 j_1 = E_0 - E_0 f(t), \\ L_2 \frac{dj_2}{dt} + M \frac{dj_1}{dt} + W_2 j_2 = 0 \end{cases}$$

schreiben.

1) Vgl. Ann. d. Phys. 3. p. 439. 1900.

2) Bei vollständiger Lösung der Differentialgleichungen (22) und (23) ergibt sich zwar eine Hülfsleichung vierten Grades, und die später mit $-q \pm pi$ bezeichneten Wurzeln erhalten etwas von den da gegebenen verschiedene Werte; die folgenden Schlussfolgerungen werden jedoch dadurch nicht beeinflusst, und die obige Annahme sei deswegen hier gerechtfertigt.

Wenn man diese Gleichungen nach vorherigem Multiplizieren der letzteren mit x summirt, so ergibt sich

$$(L_1 + Mx) \frac{dj_1}{dt} + (M + L_2 x) \frac{dj_2}{dt} + W_1 j_1 + x W_2 j_2 = E_0 - E_0 f(t),$$

und wenn x die Bedingungen

$$\frac{W_1}{L_1 + Mx} = \frac{x W_2}{L_2 x + M} = k$$

erfüllt, so kann man die obige Differentialgleichung durch

$$(27) \quad \frac{dU}{dt} + kU = kE_0 - kE_0 f(t)$$

ersetzen, wo $U = W_1 j_1 + x W_2 j_2$.

Die Bedingungsgleichungen genügen den Wurzeln

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{W_1 L_2 - W_2 L_1 \pm \sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}{2 M W_2},$$

$$\begin{cases} k_1 \\ k_2 \end{cases} = \frac{W_1 L_2 + W_2 L_1 \mp \sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2 \Delta}}{2 L_1 L_2 \Delta},$$

wo Δ die Differenz $1 - M^2/L_1 L_2$ bezeichnet.

Demgemäss erhält man aus der Gleichung (27) zwei Lösungen, je nachdem man die Wurzeln (x_1, k_1) oder (x_2, k_2) benutzt. Die Lösungen sind wie folgt:

$$(29) \quad \begin{cases} U_1 = W_1 j_1 + x_1 W_2 j_2 = E_0 + A_1 e^{-k_1 t} \\ \quad - k_1 E_0 e^{-k_1 t} \int e^{k_1 t} \cdot f(t) dt, \\ U_2 = W_1 j_1 + x_2 W_2 j_2 = E_0 + A_2 e^{-k_2 t} \\ \quad - k_2 E_0 \cdot e^{-k_2 t} \int e^{k_2 t} f(t) dt. \end{cases}$$

Wenn man dabei berücksichtigt, dass das Integral

$$e^{-k t} \int e^{k t} f(t) dt = \frac{e^{-q t}}{p^2 + (k - q)^2} \cdot \left[(k - 2q) \cos p t + \frac{p^2 + q(k - q)}{p} \sin p t \right],$$

oder annäherungsweise

$$= \frac{e^{-q t} \sin p t}{p}$$

geschrieben werden kann, so ergibt sich aus der Differenz der Gleichungen (29):

$$(30) \quad \begin{cases} (x_1 - x_2) W_2 j_2 = A_1 \varepsilon^{-k_1 t} - A_2 \varepsilon^{-k_2 t} - k_1 E_0 \cdot \varepsilon^{-q t} \frac{\sin p t}{p} \\ \quad \quad \quad + k_2 E_0 \cdot \varepsilon^{-q t} \frac{\sin p t}{p} \end{cases}$$

Die Anfangsbedingungen sind $j_1 = 0$ und $j_2 = 0$ zur Zeit $t = 0$ und aus den Gleichungen (29) erhält man somit

$$A_1 = A_2 = -E_0;$$

die Gleichung (30) kann somit

$$j_2 = - \frac{E_0 \cdot (\varepsilon^{-k_1 t} - \varepsilon^{-k_2 t})}{(x_1 - x_2) W_2} - \frac{(k_1 - k_2) E_0}{(x_1 - x_2) W_2 p} \cdot \varepsilon^{-q t} \sin p t$$

geschrieben werden, oder mit Berücksichtigung der in der Gleichung (28) gegebenen Werte der Constanten x_1 , x_2 , k_1 und k_2

$$(31) \quad \begin{cases} j_2 = - \frac{M W_1 i_0 (\varepsilon^{-k_1 t} - \varepsilon^{-k_2 t})}{\sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2} \Delta} \\ \quad + \frac{M E_0}{L_1 L_2 p \Delta} \cdot \varepsilon^{-q t} \sin p t, \end{cases}$$

wo i_0 die Stärke des constanten primären Stromes bedeutet.

Aus der Beziehung

$$j_2 = -C_2 \left(\frac{d E_2}{d t} \right)$$

zwischen der Potentialdifferenz E_2 und der Stromstärke j_2 im secundären Kreise erhält man die Spannung des ersten inducirten Stromes zur Zeit t durch Integriren. Es ergibt sich dabei

$$(32) \quad \begin{cases} E_2 = - \frac{M i_0}{C_2 W_2} \cdot \left\{ 1 - \frac{L_1 L_2 \Delta [k_2 \varepsilon^{-k_1 t} - k_1 \varepsilon^{-k_2 t}]}{\sqrt{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 L_1 L_2 W_1 W_2} \Delta} \right\} \\ \quad + \frac{M E_0}{C_2 p^2 L_1 L_2 \Delta} \{ 1 - \varepsilon^{-q t} \cos p t \}. \end{cases}$$

Messungen mit dem Galvanometer und Dynamometer im secundären Stromkreise.

Den Verlauf der beiden inducirten Ströme hat man nach den von ihnen bei diesen Messapparaten bewirkten gleichen oder verschiedenen Ausschlägen beurteilt. Aus den gleichen Galvanometerausschlägen schloss man somit, dass die bewegten

Elektricitätsmengen in beiden Fällen einander gleich sind. Aus den von dem zweiten Strome bewirkten grösseren Dynamometerausschläge wurde die Schlussfolgerung gezogen, dass der zweite Strom einen rascheren zeitlichen Verlauf hat, und dass die Stromintensität somit schneller steigt und dann wieder schneller herabfällt als bei dem ersten Strome. Die obige Theorie stimmt mit diesen Messresultaten und mit den daraus gezogenen Schlussfolgerungen völlig überein. Die Quantität oder das Zeitintegral des ersten Stromes erhält man aus der Beziehung

$$\int_0^{\infty} j_2 dt = -C_2 \cdot \int_0^{\infty} dE_2 = -C_2 [E_2]_0^{\infty}$$

und aus der Gleichung (32) ergibt sich somit

$$(33) \quad \int_0^{\infty} j_2 dt = -\frac{M i_0}{W_2},$$

wenn die Werte von k_1 und k_2 in (28) berücksichtigt werden.

Mittels des Dynamometers wird bekanntlich das Integral

$$\int_0^{\infty} j_2^2 dt$$

gemessen. Wird dasselbe Integral für den ersten inducirten Strom [mit Vernachlässigung des periodischen Gliedes aus der Gleichung (31)] berechnet, so ergibt sich

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{\infty} j_2^2 dt &= \frac{M^2 W_1^2 i_0^2}{(W_1 L_2 + W_2 L_1)^2 - 4 d L_1 L_2 W_1 W_2} \left[\frac{1}{2 k_1} + \frac{1}{2 k_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{k_1 + k_2} \right] = \left(\frac{M i_0}{L_2} \right)^2 \cdot \frac{\frac{W_1}{L_1}}{\frac{2 W_2}{L_2} \left(\frac{W_1}{L_1} + \frac{W_1}{L_2} \right)}. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen die Integrale (33) und (34) mit den entsprechenden Integralen des zweiten Stromes vergleichen; da jedoch die früher gegebenen Formeln des zweiten Stromes sehr unbequem zu handhaben sind, so wird, um die Rechnung zu vereinfachen, angenommen, dass β sehr gross gegenüber α und γ sei — was z. B. bei einem Inductorium, das sich mit

einem primären Condensator von sehr geringer Capacität begünstigt, eintritt — und unter dieser Voraussetzung erhält man aus den Gleichungen (10) annäherungsweise

$$Y_0 = \frac{M i_0}{L_2}, \quad Y_1 = -\frac{M i_0}{L_2}, \quad Y_2 = 0$$

und aus (12)

$$B_0 = \frac{M}{W_2} i_0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -\frac{M i_0}{\beta}.$$

Die letzte Gleichung (8), welche die secundäre Stromstärke darstellt, wird dadurch zu

$$(35) \quad i_2 = \frac{M i_0}{L_2} (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t),$$

vereinfacht, und ebenso erhält man aus der Gleichung (11) die Annäherungsformel

$$(36) \quad E_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2} (1 - \varepsilon^{-\gamma t}) - \frac{M i_0}{L_2 C_2 \beta} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

welche die secundäre Potentialdifferenz darstellt.

Aus der Gleichung (35) erhält man somit das Zeitintegral

$$\int_0^{\infty} i_2 dt = \frac{M i_0}{L_2} \left[\frac{1}{\gamma} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right] = \frac{M i_0}{W_2} \left[1 - \frac{\alpha \gamma}{\alpha^2 + \beta^2} \right]$$

und weil α und γ neben β vernachlässigt werden können, so ergibt sich einfach

$$(37) \quad \int_0^{\infty} i_2 dt = \frac{M i_0}{W_2}.$$

Aus den Gleichungen (33) und (37) geht somit hervor, dass die Zeitintegrale der beiden inducirten Ströme einander numerisch gleich sind und sich nur bei dem Vorzeichen voneinander unterscheiden. *Eine Galvanometernadel muss demzufolge dieselbe Ablenkung von dem ersten wie von dem zweiten inducirten Strome erfahren; nur die Richtung der Ablenkung ist im letzteren Falle entgegengesetzt.*¹⁾

1) Dieser Satz ist von Hrn. Thalén und mehreren anderen geprüft worden. Was die theoretische Ableitung betrifft, so kann sie unmittelbar aus den Differentialgleichungen weit einfacher dargestellt werden, und die obige Berechnung dient deswegen nur als eine Controle der An-

Ferner erhält man aus der Gleichung (35)

$$\int_0^{\infty} i_2^2 dt = \left(\frac{M i_0}{L_2} \right)^2 \cdot \left[\frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{4\alpha} - \frac{2(\alpha + \gamma)}{(\alpha + \gamma)^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \beta^2)} \right].$$

Wenn man dabei berücksichtigt, dass β sehr gross gegenüber α und γ ist und ferner $\gamma = (W_2/L_2)$, so erhält man annäherungsweise

$$(38) \quad \int_0^{\infty} i_2^2 dt = \left(\frac{M i_0}{L_2} \right)^2 \cdot \left[\frac{1}{2 \frac{W_2}{L_2}} + \frac{1}{4\alpha} \right].$$

Wird das obige Integral mit dem in Gleichung (34) dargestellten Integrale des ersten Stromes verglichen, so findet man, dass das erste Glied in (38) grösser als das ganze Integral (33) ist, und ein *Dynamometer, in dem secundären Kreise eingeschaltet, muss somit einen grösseren Ausschlag beim zweiten inducirten Strome als bei dem ersten geben.*

Eine graphische Darstellung des in den Gleichungen (32) und (35) gegebenen zeitlichen Verlaufes der beiden Inductionsströme zeigt deutlich, dass der zweite Strom schneller ansteigt, und eine grössere Intensität erreicht, als der erste Strom, dass er auch sogleich schneller herabfällt, und in dieser Hinsicht stimmt somit die Theorie mit den früher beobachteten Thatsachen überein. Dagegen können wir nicht die besonders kräftigen Wirkungen des zweiten Stromes nur dem schnelleren Verlaufe desselben allein zuschreiben, sondern dieselben hängen grösstenteils von den Schwingungen des zweiten Stromes ab, wie später näher erörtert werden soll.

Die Entladungsbedingungen.

Die Bedingungen, unter welchen die Funkenentladungen erfolgen, sind sehr unvollständig bekannt; zwar fehlt es nicht an Hypothesen, die von der Erfahrung mehr oder weniger stark gestützt werden, aber eine Entscheidung, welche unter ihnen die wahrscheinlichste ist, hat man noch nicht erzielt.

Die Unabhängigkeit dieses Satzes von der Verteilung des Stromes im Querschnitte ist von Lord Kelvin nachgewiesen worden (Phil. Mag. (5) 29. p. 276. 1890).

1. Die älteste Ansicht über die Ursache des Funkens ist wohl die von Faraday ausgesprochene. Beim Vergleichen des Oeffnungsstromes mit hydrodynamischen Vorgängen wurde Faraday zu einer Anschauung geführt, nach welcher der Oeffnungsfunke der Energie des Oeffnungsstromes zugeschrieben werden muss, eine Ansicht, der hinsichtlich des Oeffnungsfunkens von Hrn. S. Thompson u. a. beigetreten wird.¹⁾

2. Bald traten die Untersuchungen über die sogenannten elektrostatischen Entladungen in den Vordergrund, und die dabei gemessenen Entladungspotentiale wurden unter der Voraussetzung ermittelt, dass bei einem bestimmten Gase von bestimmtem Drucke in der Funkenstrecke und einer bestimmten Form der Elektroden das Funkenpotential nur von dem Elektrodenabstände abhängt.

3. Zuletzt wurde von Hrn. Jaumann die Abhängigkeit des Funkenpotentials von der zeitlichen Aenderung des Entladungsfeldes nachgewiesen, was offenbar mit der Faraday'schen Anschauung im Einklang steht oder wenigstens sich davon wenig unterscheidet. Zwischen der Stromstärke i und der Potentialdifferenz E besteht, z. B. bei Flaschenentladungen, die Beziehung $i = C(dE/dt)$, wo C eine Capacität bedeutet, und die Energie des Stromes ist somit $iE = CE(dE/dt)$. Die von Hrn. Jaumann dargestellte Entladungsbedingung ist $E(dE/dt)$ und nach Faraday soll die Entladung von der Grösse $CE(dE/dt)$ abhängen; die beiden Grössen sind nur bei der Constante C verschieden.

Was die zweite Ansicht betrifft, so kann sie schwerlich eine vollständige Entladungsbedingung enthalten, und jedenfalls hängen die Messungen von Umständen ab, die uns den gemessenen Potentialen eine bestimmte Bedeutung zu erteilen kaum erlauben. Sie wurde anfangs in der Vorstellung, dass bei der Ladung das Potential allmählich ohne Schwankungen wächst, begründet; aber die zur Erzeugung der elektrostatischen Entladungen benutzten elektrostatischen Maschinen erlauben nicht ein allmähliches stetiges Anwachsen des Potentials, wie sich aus einem Versuche von Wollaston, welcher von Faraday wiederholt wurde, ergibt.²⁾ Dieser Versuch zeigt, wie schon

1) S. Thompson, The Elektromagnet p. 363 u. f. 1891.

2) M. Faraday, Experimental Researches I. Art. p. 327—329. 1849.

früher hervorgehoben wurde¹⁾, dass bei Spitzenelektroden die Potentialschwankungen wahrscheinlich am wenigsten, 8 Volt, betragen; bei Kugelelektroden dürfen diese Oscillationen etwas schwächer sein, aber es ist jedoch nicht sichergestellt, ob sie die gemessene Potentiale beeinflussen oder nicht; jedenfalls können sie bei kleineren Potentialen, d. h. bei kleinerem Elektrodenabstande, kaum ohne Einfluss sein. Die dabei gemessenen Potentiale beziehen sich auf keine rein elektrostatische Ladung, und die einzige daraus zu ziehende Schlussfolgerung ist, dass die zur Entladung nötige Potentialdifferenz in einem mehr oder minder beschränkten Gebiete der Funkenlänge proportional wächst. Andererseits ist die Beziehung der Entladung zu dem Quotienten dE/dt nicht sicher festgestellt worden, und wir sind somit ungehindert, die Entladungsbedingungen eben in den Vorgängen beim Inductorium zu suchen.

Zu diesem Zwecke mögen wir zuerst die beiden secundären Ströme vergleichen. Von beiden werden dieselben Elektrizitätsmengen M_{i_0}/W_2 von dem einen Pole zu dem anderen geführt, und es wäre ja ganz unbegreiflich, wenn diese Menge, in einem Sinne bewegt, eine grössere Potentialdifferenz hervorbringen würde, als wenn sie in entgegengesetztem Sinne fortgeführt wird. *Die maximale Spannung im secundären Kreise muss somit wesentlich dieselbe bei den beiden Strömen sein*, und die vom zweiten Strome erzeugte Funkenentladung kann somit nur der zeitlichen Aenderung der Potentialdifferenz zugeschrieben werden; aus dem schnelleren Verlaufe des zweiten Stromes folgt nämlich, dass die secundäre Stromstärke i_2 und damit ebenso dE/dt einen grösseren Betrag beim zweiten Strome erreicht, was mit der Jaumann-Faraday'schen Entladungsbedingung übereinstimmt. Eine nähere Begründung der oben erwähnten Erscheinungen führt jedoch zu einer abgeänderten Formulirung dieser Bedingung. Es geht aus den Beobachtungen der Herren Walter und Mizuno hervor, dass die maximale Funkenlänge im secundären Kreise mit der Quadratwurzel aus der primären Capacität umgekehrt proportional ist, und diese Capacität beeinflusst nicht das erste Glied des in Gleichung (35) dargestellten Ausdruckes des zweiten

1) K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 463. 1900.

secundären Stromes, sondern nur die letzte periodische Komponente dieses Stromes hängt von der Capacität C_1 ab, und zwar so, dass die Frequenz $\beta/2\pi$ der Quadratwurzel aus C_1 umgekehrt proportional ist, wogegen die Schwingungsamplitude von dieser Capacität unabhängig ist. Die Frequenz $\beta/2\pi$ beeinflusst also nicht die maximale Secundärspannung, jedoch ist die maximale Funkenlänge dieser Frequenz proportional.

Diese Schlussfolgerung wird von den elektrolytischen Vorgängen im secundären Kreise völlig bestätigt und gerechtfertigt. Die Knallgasentwicklung, die in einem im secundären Kreise eingeschalteten Voltameter stattfindet, wird nur von dem zweiten Strome erzeugt, wie oben erwähnt wurde¹⁾, und zwar ist die pro Zeiteinheit entwickelte Gasmenge der Quadratwurzel aus der primären Capacität umgekehrt proportional. Die Erzeugung von Knallgas im secundären Kreise beweist somit die Anwesenheit von sehr schnellen Potentialschwankungen in dem zweiten Strome, und die übereinstimmende Abhängigkeit der entwickelten Knallgasmenge und der maximalen Funkenlänge von der primären Capacität zeigt ja deutlich, dass sie alle beide von der Frequenz herrühren müssen. In der Gleichung (35) haben die beiden Glieder denselben Coefficient, und es ist deswegen dabei nicht möglich zu entscheiden, ob die Funkenlänge von der Amplitude abhängt. Wenn man bedenkt, dass die Schwingungen bei einer Amplitude Null aufhören, so ist es wohl kaum wahrscheinlich, dass die Entladung von der Amplitude unabhängig sein kann. Dies folgt auch von den vom Schliessungsstrome erzeugten secundären Funkenentladungen. Die maximale Länge der beim Schliessen erzeugten secundären Funken wird nach den Beobachtungen Hrn. Beattie's²⁾ bei constanter Stärke des stationären Stromes von keiner Abänderung im primären Kreise beeinflusst, die elektromotorische Kraft der Batterie jedoch ausgenommen. Bei einer Stärke des stationären Stromes von 2,5 Amp. zeigte sich eine raue Proportionalität („a rough proportionality“) zwischen der Funkenlänge und der elektromotorischen Kraft, welche letztere dabei von 10—90 Volt variirt wurde. Die Gleichung (31), die den Verlauf des ersten

1) Vgl. Inaugural-Dissertation p. 26—30.

2) J. C. Beattie, Phil. Mag. (5) 50. p. 139. 1900.

Stromes darstellt, giebt eine Frequenz der schwingenden Bewegung von $p/2\pi$, welche aus der primären Capacität C_1 in ebenderselben Weise wie $\beta/2\pi$ abhängt; die Amplitude ist dagegen p umgekehrt proportional. Weil die Funkenlänge von p unabhängig ist, so muss sie somit von dem Producte aus der Frequenz und der Amplitude abhängen; denn dieses Product ist von p unabhängig und der elektromotorischen Kraft E_0 proportional. Eine genaue Proportionalität zwischen der Funkenlänge und der elektromotorischen Kraft kann dagegen nicht experimentell gefunden werden, denn dafür ist dieselbe maximale Secundärspannung nötig. Wie aus der Gleichung (31) hervorgeht, ist jedoch das erste Glied des Stromes j_2 von der Aenderung des primären Widerstandes nicht ganz unabhängig, und die unperiodische Stromcomponente, die zur Ladung des secundären Poles dient, muss somit demselben eine je nach dem Widerstande abgeänderte Maximalspannung erteilen.

Aus dem oben erwähnten Ergebnisse kann man somit schliessen, dass die *maximale Funkenlänge der Amplitude der Schwingungen proportional ist*.

Wird den obigen Entladungsbedingungen die dritte, dass die *Funkenlänge mit dem Entladungspotentiale proportional wächst*, zugefügt, so ergibt sich

$$(I) \quad l_{\max} = K \cdot A_i \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot (V - V_0),$$

wo l_{\max} die maximale Funkenlänge, A_i die Amplitude und $\beta/2\pi$ die Frequenz des Stromes bedeuten, und V die vom Strome erzeugte Potentialdifferenz bezeichnet.

Wir haben die Entladungsbedingungen bis jetzt in der secundären Stromstärke gesucht; dies ist jedoch eine Willkürlichkeit; es zeigt sich nämlich, dass dieselben gleich gut von den Potentialschwankungen abgeleitet werden können. Wenn eine der obigen Ableitung ähnliche bezüglich der Aenderung der Secundärspannung ausgeführt wird, so erhält man die Beziehung:

$$(II) \quad l_{\max} = K_1 \cdot A_e \cdot \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2 \cdot (V - V_0),$$

und es ist gegenwärtig nicht möglich zu entscheiden, ob (I) oder (II) die wahre Beziehung zwischen Funkenlänge und Potentialdifferenz liefert. Bei Benutzung der Gleichung (I) erhält man für den zweiten Strom

$$l_{\max} = K \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot (V - V_0),$$

und für den ersten

$$l_{\max} = K \cdot \frac{M E_0}{2\pi L_1 L_2 d} \cdot (V - V_0).$$

Verwendet man wieder die Gleichung (II), so ergibt sich für den ersten Strom

$$l_{\max} = K_1 \cdot \frac{M E_0}{(2\pi)^3 \cdot L_1 L_2 C_2 d} \cdot (V - V_0)$$

und für den zweiten

$$l_{\max} = K_1 \cdot \frac{M i_0 \beta}{(2\pi)^3 \cdot L_2 C_2 \beta} (V - V_0).$$

Die obigen Erscheinungen werden gleich gut in beiden Fällen befriedigt.

Wenn wir eine Beziehung

$$l = K \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{\beta}{2\pi} (V - V_0)$$

oder

$$V - V_0 = \frac{2\pi L_2 \cdot l}{K \cdot M i_0 \beta}$$

zwischen Funkenlänge und Potentialdifferenz annehmen, so erhält man

$$(39 I) \quad \tau_n = \frac{2\pi \cdot l \cdot L_2^2 C_2}{K \cdot \beta M^2 i_0^2} \cdot \varepsilon^{-\gamma t_n}$$

wenn die Grösse $E - E_0$ in der Gleichung (19 a) mit dem oben angegebenen Werte von $V - V_0$ ersetzt wird und die periodischen Glieder in (19 a) vernachlässigt werden.

Geht man im Gegenteil von der Beziehung

$$l = K_1 \cdot \frac{M i_0}{L_2 C_2} \cdot \frac{\beta}{(2\pi)^3} \cdot (V - V_0)$$

aus, so erhält man

$$(39 II) \quad \tau_n = \frac{(2\pi)^3 \cdot l \cdot L_2^2 C_2^2}{K_1 \beta M^2 i_0^2} \cdot \varepsilon^{-\gamma t_n}.$$

Nach der ersten Gleichung (39 I) sollen die Zeitabständen t_n der secundären Capacität, nach der zweiten (39 II) dem Quadrate der secundären Capacität proportional sein. Bei Aenderung der secundären Capacität sollte man somit eine Entscheidung über die wahre Entladungsbedingung erzielen. Die Tab. 7 und 8 in der oben erwähnten Arbeit von Hrn Moll¹⁾ werden zu diesem Zwecke mitgeteilt. Sie enthalten die secundäre Capacität einer im secundären Kreise eingeschalteten Leydener Batterie in elektrostatischem Maasse; die Zeitabstände der

1) T. Moll, Bih. till K. Sv. Vet. Akad. Handl. 12. 1886.

einzelnen elementaren Funken sind zwar nicht angegeben worden, sondern statt derselben ihr Mittelwert u . Wenn die einzelnen Zeitabstände τ_n mit C_2 oder C_2^3 proportional sind, so muss dasselbe auch vom Mittelwerte u gelten. Einer Constanz des Quotienten u/C_2^3 wird in den Tabellen entschieden widersprochen; dagegen sind die Abweichungen von einer Constanz u/C_2 nicht grösser, als dass sie mit der Gleichung (39 I) vereinbar sind. Ich schloss demzufolge, dass die zweite Gleichung (II und 39 II) verworfen werden musste; es zeigte sich indessen, dass dies ein Trugschluss war, wie im Folgenden erwiesen wird.

Tabelle 7.

Stromstärke 3,98 Amp.; Funkenlänge 2 mm.

Capacität C_2	Verlauf der Entladung ¹⁾	Mittelwert der Funkenzahl		Die ganze Entladungsdauer	Mittelwert der Zeitabstände der elementaren Funken u	Die Dauer der stillen Entladung in Proc. der ganzen Entladungsdauer	Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Teile der stillen Entladung	$\frac{u}{C_2}$	Zahl der Beobachtungen
		Vor der stillen Entladung	Nach der stillen Entladung						
285	1, 1, 2	1,3	—	0,00223	0,00223	—	—	76	3
148	3, 3, 3	3,0	—	0,00295	0,00148	—	—	103	3
78,5	10, 11, 8	9,7	—	0,00456	0,00528	—	—	68	3
67	15, 12, 8	11,7	—	0,00453	0,00488	—	—	66	3
31	25	25,0	—	0,00632	0,00263	—	—	85	1
31	4, α , 30	—	4,0	20,0	0,00632	—	18,9	—	—
28	2, α , 9	—	—	—	0,01275	—	72,1	—	—
28	1, α , 14	—	—	—					
23	3, α , 14	—	2,0	12,3	0,01528	—	91,3	—	—
$x^2)$	3, α , 9	—	—	—					
	1, α , 1	—	—	—	0,01815	—	91,3	3,8	—
	1, α , 5	—	1,7	5,0					
	1, α , 1, α , 5	—	—	—	0,01815	—	91,3	3,8	—
	1, α , 1, α , 5	—	—	—					
	1, α , 1, α , 6	—	1,0	5,3					

1) Der Buchstabe α bedeutet stille Entladung; 1, α , 1, α , 5 bedeutet somit ein Funke, stille Entladung, ein Funke, stille Entladung, fünf Funken.

2) Mit x wird eine Capacität < 23 bezeichnet, die jedoch nicht bestimmt wurde.

Tabelle 8.

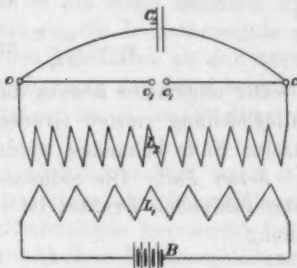
Stromstärke 3,96 Amp.; Funkenlänge 1 mm.

Capacität C_2	Verlauf der Entladung	Mittelwert der Funkenzahl			Die ganze Entladungs- dauer	Mittelwert der Zeit- abstände der elemen- taren Funken "	Die Dauer der stillen Entladung in Proc. der ganzen Entladungs- dauer	Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Teile der stillen Ent- ladung	$\sum \frac{1}{n}$	Zahl der Beobachtungen
		Vor der stillen Entladung	Nach der stillen Entladung							
347	4, 4, 5	4,3	—	—	0,00512	0,001525	—	—	44	3
285	6, 5	5,5	—	—	0,00631	—	—	—	49	3
143	12, 13, 13	12,7	—	—	—	—	—	—	—	3
78,5	einige, a, 16	—	—	15	0,01024	—	24,7	—	—	3
78,5	einige, a, 16	—	—		—	—	—	—	—	—
78,5	einige, a, 13	—	—		—	—	—	—	—	—
67	34	84	—	—	0,01027	0,000311	—	—	47	2
67	34		—	—	—	—	—	—	—	—
67	5, a, 21	—	5	21	0,01528	—	44,5	—	—	1
31	2, a, 27	—	1,3	29,7	0,01909	—	67,5	—	—	3
31	1, a, 27	—			—	—	—	—	—	—
31	1, a, 35	—			—	—	—	—	—	—
23	1, a, 18	—	1,0	15,7	0,02171	—	76,7	—	—	3
23	1, a, 15	—			—	—	—	—	—	—
23	1, a, 14	—			—	—	—	—	—	—
x	1, a, 20	—	1,0	20,0	0,02298	—	77,7	—	—	2
	1, a, 20	—			—	—	—	—	—	—
31	1, a, 1, a, 18	—	1,3	19,7	0,02128	—	75,7	2,7	—	3
31	1, a, 1, a, 22	—			—	—	—	—	—	—
31	2, a, 1, a, 19	—	1,0	17,3	0,02224	—	81,9	3,6	—	3
23	1, a, 1, a, 12	—			—	—	—	—	—	—
23	1, a, 1, a, 18	—			—	—	—	—	—	—
23	1, a, 1, a, 22	—	1,0	11,0	0,02264	—	81,4	4,2	—	2
x	1, a, 1, a, 11	—			—	—	—	—	—	—
	1, a, 1, a, 11	—			—	—	—	—	—	—

Die Abzweigung des secundären Stromkreises mittels eines
Condensators.

Bei Parallelschaltung eines Condensators mit der Funken-
strecke wird der secundäre Strom verteilt, und zwar so, dass
der grösste Teil des Stromes zum Condensator geht, während

nur ein kleiner Teil zum Funkenmikrometer erlangt. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Anordnung eine ganz symmetrische ist (vgl. beistehende Figur); von dem secundären Pole c führt ein Kupferdraht zum Funkenmikrometer c_1 und ein anderer Draht zum Condensator C_2 . L_1 ist die primäre und L_2 die secundäre Rolle des Inductors, der mit der Batterie B gespeist wird. Der Verzweigungspunkt c besitzt eine Capacität c (z. B. diejenige einer Klemmenschraube) und dem Funkenmikrometer wird die Capacität c_1 erteilt. C_2 ist die Capacität des Condensators C_2 . Es sei ferner w_1 der Widerstand und λ_1 die Selbstinduction des Drahtes $c c_1$; w_2 und λ_2 die entsprechenden Grössen des Drahtes $c C_2$. Wie oben wird vorausgesetzt, dass die Rückwirkung des Condensators und der ganzen Verzweigungsvorrichtung den secundären Strom des Inductors nicht beeinflusst. Die Stärke dieses Stromes ist demzufolge



$$(40) \quad i = \frac{M i_0}{L_2} (e^{-\gamma t} - e^{-\alpha t} \cos \beta t),$$

wie sie in der Gleichung (35) dargestellt worden ist.

Wird die Stromstärke im Zweige $c c_1$ mit i_1 , und diejenige in $c C_2$ mit i_2 bezeichnet, und nennt man ferner V , V_1 und V_2 die Potentiale in c , c_1 und C_2 zur Zeit t , so erhält man folgende Gleichungen:

$$(41) \quad \begin{cases} \lambda_1 \frac{d i_1}{d t} + w_1 i_1 = V - V_1, \\ \lambda_2 \frac{d i_2}{d t} + w_2 i_2 = V - V_2, \\ i_1 = c_1 \frac{d V_1}{d t}, \\ i_2 = C_2 \frac{d V_2}{d t}, \\ i = i_1 + i_2 + c \frac{d V}{d t}. \end{cases}$$

Beim Eliminiren von V , V_1 und V_2 ergibt sich

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + 2 q_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 \left(\frac{1}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_1 c_1} \right) + \frac{i_2}{\lambda_1 c} = \frac{i}{\lambda_1 c}, \\ \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2 q_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 \left(\frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 c_2} \right) + \frac{i_1}{\lambda_2 c} = \frac{i}{\lambda_2 c}, \end{cases}$$

wo

$$q_1 = \frac{w_1}{2 \lambda_1} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{W_2}{2 \lambda_2}.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen hängt von einer Hülfsleichung vierten Grades ab, und es sollen daher nur einzelne Fälle behandelt werden.

Erster Fall. Die Selbstinduction des zum Funkenmikrometer führenden Drahtes ist sehr gross. Wir setzen die Beziehung

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{c_1}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c_2}} = \frac{q_2}{q_1} = m$$

voraus, wo demnach m eine sehr grosse Zahl ist. Wenn die erste Gleichung (42) mit m multiplicirt und dann die zweite davon subtrahirt wird, so ergibt sich

$$\frac{d^2}{dt^2} (m i_1 - i_2) + \frac{m i_1 - i_2}{\lambda_2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c_2} \right) = 0$$

und diese Gleichung liefert das Integral

$$m i_1 - i_2 = A \cos p t + B \sin p t,$$

wo

$$p = \pm i \sqrt{\frac{1}{\lambda_2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c_2} \right)}.$$

Zur Zeit $t=0$ hat man $i_1 = i_2 = 0$ und aus den Gleichungen (41) ergibt sich dabei auch $di_1/dt=0$ und $di_2/dt=0$. Die Integrationsconstanten A und B sind damit beide Null, und demzufolge hat man einfach $m i_1 - i_2 = 0$ oder

$$\frac{i_2}{i_1} = m.$$

Je grösser m ist, d. h. je grösser die Selbstinduction des zum Funkenmikrometer führenden Zweiges ist, um so schwächer ist die Stärke des zum Funkenmikrometer führenden Stromes, und um so kleiner sind daher die Potentialschwingungen, die von diesem Strome erzeugt werden.

Dieses Verhalten wird von Hrn. Hemsalech bestätigt; statt einer Funkenstrecke benutzte er eine Geissler'sche Röhre (oder eine Funkenstrecke und die Röhre wurden nacheinander eingeschaltet). Der Zweig cc_1 bestand aus einer Inductionsspule. Ohne Eisenkern in die Spule leuchtete noch die Röhre. Wurde der Eisenkern in die Inductionsspule gebracht, so nahmen die Oscillationen allmählich ab und hörten zuletzt ganz auf.¹⁾ Die Übereinstimmung der dabei benutzten Anordnung mit unseren Annahmen ist ja unmittelbar ersichtlich.

Dieselbe Erscheinung wurde auch beobachtet, wenn statt des Inductoriums eine Wimshurstmaschine als Stromquelle verwendet wurde. Wie aus den Rechnungen hervorgeht ist ja die Erscheinung mit den elektrostatischen Funkenentladungen ganz ähnlich.²⁾ In der That ist ja die Verzweigung ganz dieselbe wie bei den elektrostatischen Entladungen; der Saugkamm des Conductors der Holtz'schen Maschine wird hier von der Klemmschraube im Verzweigungspunkte vertreten und statt des intermittirenden Zuflusses der Elektricität von den Spitzen des Saugkammes wird die Ladung hier von dem Strom des Inductors bewirkt.

Zweiter Fall. Es wird $q_1 = q_2$ vorausgesetzt, was z. B. eintrifft, wenn die Drähte cc_1 und cC_2 einander gleich sind. Die Gleichungen (42) werden nach vorherigem Multipliciren der ersteren mit x summirt, und man erhält dabei

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + 2q \frac{dU}{dt} + i_1 \left(\frac{x}{\lambda_1 c_1} + \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} \right) + i_2 \left(\frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} \right) = i \left(\frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} \right),$$

wo $x i_1 + i_2$ mit U bezeichnet wird.

Wenn x den Bedingungen

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{x}{\lambda_1 c_1} + \frac{1}{\lambda_2 c} = kx \\ \frac{x}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 C_2} = k \end{cases}$$

1) G. A. Hemsalech, *Compt. rend.* 130. p. 898. 1900; *Beibl.* 24. p. 827. 1900.

2) Vgl. K. R. Johnson, *Ann. d. Phys.* 3. p. 461. 1900.

genügt, so nimmt die obige Differentialgleichung die Form

$$(44) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} + 2q \frac{dU}{dt} + kU = \frac{i}{c} \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

an. Aus den Bedingungsgleichungen (43) erhält man folgende Werte von x und k :

$$(45) \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 c_2} \right] \\ \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 c_2} \right]^2 + \frac{4\lambda_1}{\lambda_2}}, \\ \begin{cases} k_1 \\ k_2 \end{cases} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\lambda_1 c} + \frac{1}{\lambda_1 c_1} + \frac{1}{\lambda_2 c} + \frac{1}{\lambda_2 c_2} \right] \\ \pm \frac{1}{2\lambda_1 c} \sqrt{\left[1 + \frac{c}{c_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1 c}{\lambda_2 c_2} \right]^2 + \frac{4\lambda_1}{\lambda_2}}.$$

Je nachdem man die Werte k_1 und x_1 oder k_2 und x_2 wählt, erhält man zwei verschiedene Lösungen der Differentialgleichung (44), und diese Lösungen hängen von den Wurzeln der Gleichungen

$$z^2 + 2qz + k_1 = 0 \quad \text{und} \quad z^2 + 2qz + k_2 = 0$$

ab.

k_1 und k_2 sind positive Grössen, deren Product

$$(45a) \quad k_1 k_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \cdot \left(\frac{1}{c c_1} + \frac{1}{c c_2} + \frac{1}{c_1 c_2} \right)$$

ist. Die Wurzeln der ersten Hilfsleichung sind immer complexe Zahlen $-q \pm p_1 i$; die der zweiten Hilfsleichung $z^2 + 2qz + k_2 = 0$ können sowohl complexe als reelle Zahlen sein, je nach dem Betrage der Grösse k_2 . Bei der Behandlung der entsprechenden Gleichungen für die elektrostatischen Entladungen¹⁾ nahmen wir den Fall an, dass diese Wurzeln reell waren. Wegen der Leichtigkeit der Rechnung wollen wir dieselben hier als complexe Zahlen $-q \pm p_2 i$ behandeln. Aus der Gleichung (44) erhält man somit die Integrale:

$$(46) \quad \begin{cases} U_1 = x_1 i_1 + i_2 = e^{-qt} (A_1 \cos p_1 t + B_1 \sin p_1 t) \\ \quad + X_1 e^{-\gamma t} + e^{-\alpha t} (Y_1 \cos \beta t + Z_1 \sin \beta t), \\ U_2 = x_1 i_1 + i_2 = e^{-qt} (A_2 \cos p_2 t + B_2 \sin p_2 t) \\ \quad + X_2 e^{-\gamma t} + e^{-\alpha t} (Y_2 \cos \beta t + Z_2 \sin \beta t), \end{cases}$$

1) l. c.

wo A_1, B_1, A_2 und B_2 Integrationsconstanten sind. Das Glied, welches die Constanten X_1, Y_1 und Z_1 (bez. X_2, Y_2 und Z_2) enthält, rührt vom rechten Gliede der Differentialgleichung her und diese Coefficienten sind daher von dieser Gleichung bestimmt. Ihre Werte sind wie folgt:

$$\begin{aligned} X &= \frac{M i_0}{L_2 c} \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \cdot \frac{1}{\gamma^2 - 2 q \gamma + k}, \\ (46) \quad Y &= - \frac{M i_0}{L_1 c} \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k}{(\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k)^2 + 4 \beta^2 (\alpha - q)^2}, \\ Z &= \frac{M i_0}{L_2 c} \left(\frac{x}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{2 \beta (\alpha - q)}{(\alpha^2 - \beta^2 - 2 \alpha q + k)^2 + 4 \beta^2 (\alpha - q)^2}, \end{aligned}$$

wo die Indices 1 oder 2 den Grössen x und k beizulegen sind, je nachdem X_1, Y_1, Z_1 oder X_2, Y_2, Z_2 evaluiert werden sollen. Zur Zeit $t=0$ sind sowohl i_1 als i_2 gleich Null und ebenso di_1/dt und di_2/dt . Aus diesen Anfangsbedingungen ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} A_1 &= -(X_1 + Y_1), \quad A_2 = -(X_2 + Y_2); \\ B_1 &= \frac{1}{p_1} \left[(\gamma - q) X_1 + (\alpha - q) Y_1 - \beta Z_1 \right], \\ B_2 &= \frac{1}{p_2} \left[(\gamma - q) X_2 + (\alpha - q) Y_2 - \beta Z_2 \right]. \end{aligned}$$

Es wurde oben angenommen, dass β sehr gross gegenüber α und β ist; ferner geht aus den Gleichungen (45) hervor, dass k_1 sehr gross gegenüber β^2 ist, und dass unter Umständen dasselbe auch von k_2 gilt. Dementsprechend können wir den Constanten folgende Annäherungswerte beilegen:

$$\begin{aligned} X_1 &= -Y_1 = \frac{M i_0}{L_2 c k_1} \left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), \quad Z_1 = 0, \\ X_2 &= -Y_2 = \frac{M i_0}{L_2 c k_2} \left(\frac{x_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), \quad Z_2 = 0, \\ A_1 &= 0, \quad B_1 = \frac{\gamma - \alpha}{p_1} \cdot \frac{M i_0}{L_2 c k_1} \left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right), \\ A_2 &= 0, \quad B_2 = \frac{\gamma - \alpha}{p_2} \cdot \frac{M i_0}{L_2 c k_2} \left(\frac{x_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right). \end{aligned}$$

Werden i_1 und i_2 in den Gleichungen (46) getrennt, so erhält man

$$(47) \quad \begin{cases} (x_1 - x_2) i_1 = \varepsilon^{-q t} (B_1 \sin p_1 t - B_2 \sin p_2 t) \\ \quad + (X_1 - X_2) (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t), \\ (x_1 - x_2) i_2 = \varepsilon^{-q t} (-x_2 B_1 \sin p_1 t + x_1 B_2 \sin p_2 t) \\ \quad + (-x_2 X_1 + x_1 X_2) (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t). \end{cases}$$

Werden die Coefficienten dieser Gleichungen mittels der Gleichungen (43) und (45) reducirt, und dabei $1/k\lambda_2 C_2$ neben 1 vernachlässigt, so ergibt sich

$$(48) \quad \begin{cases} i_1 = \frac{\gamma - \alpha}{x_1 - x_2} \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \varepsilon^{-q t} \left[\frac{\sin p_1 t}{p_1} - \frac{\sin p_2 t}{p_2} \right] \\ \quad + \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{c_1}{c + c_1 + C_2} \cdot (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t) \\ i_2 = \frac{\gamma - \alpha}{x_1 - x_2} \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \varepsilon^{-q t} \left[-\frac{x_2 \sin p_1 t}{p_1} + \frac{x_1 \sin p_2 t}{p_2} \right] \\ \quad + \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{C_2}{c + c_1 + C_2} \cdot (\varepsilon^{-\gamma t} - \varepsilon^{-\alpha t} \cos \beta t). \end{cases}$$

Die beiden Zweigströme enthalten jeder eine zu der Capacität an dem Ende des Zweiges proportionale Componente des secundären Hauptstromes, was auch vorauszusehen war. Der zum Funkenmikrometer führende Strom i_1 hat eine Intensität, die der Capacität des Condensators umgekehrt proportional ist, das rechte Glied der Gleichung (39 I) muss somit mit der Grösse $c + c_1 + C_2/c_1$ multiplicirt werden, wenn man die Entladungsbedingungen des verzweigten Stromkreises verwerten soll. Man kommt somit auch in diesem Falle bei den Beobachtungen in Tab. 7 und 8 zu ganz widersprechenden Resultaten, nämlich dass die Zeitabstände der elementaren Funken dem Quadrate der Capacität proportional sein sollen. Diese fehlerhafte Schlussfolgerung hängt, wie sich nachweisen lässt, von der Annahme her, dass die Funkenentladung von den Schwingungen des Hauptstromes bedingt sein sollte. Bilden wir von der Bedingungsleichung

$$l_m = K \cdot A_i \cdot \frac{\beta}{2\pi} \cdot (V - V_0),$$

die die maximale Funkenlänge (nach I) bestimmt, das Product $A_i \cdot (\beta/2\pi)$ für die Schwingungen des Hauptstromes, die zum Funkenmikrometer gehen, so erhalten wir

$$A_i \frac{\beta}{2\pi} = \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{c_1}{c + c_1 + C_2} \cdot \frac{\beta}{2\pi}.$$

Bilden wir dasselbe Product für die Stromcomponente, deren Frequenz $p_1/2\pi$ ist, so ergibt sich

$$(49) \quad \frac{\gamma - \alpha}{x_1 - x_2} \cdot \frac{M i_0}{L_2} \cdot \frac{1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{2\pi} = \frac{\gamma - \alpha}{x_1 - x_2} \cdot \frac{M i_0}{2\pi L_2}$$

und wenn die Entladung von der Componente, deren Frequenz $\beta/2\pi$ ist, über die Componente p_1 walten soll, so ist die notwendige Bedingung dafür, dass das erste Product viel grösser als das zweite ist, oder

$$\frac{c_1}{c + c_1 + C_2} \cdot \beta > \frac{\alpha - \gamma}{x_1 - x_2}.$$

Zwar ist β gross gegenüber α und γ , aber dasselbe gilt auch von C_2 gegenüber c_2 , und es lässt sich ohne Zahlenangaben nicht entscheiden, wann die obige Bedingung erfüllt ist. Bei dem von Hrn. Moll benutzten Inductorium waren die Constanten, wie früher angegeben wurde¹⁾,

$$\gamma = 52,6, \quad \alpha = 81,8 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{2\pi}{0,000898}$$

und als Elektroden in der Funkenstrecke wurden Eisendrähte von 1,94 mm Durchmesser benutzt. Die zu erfüllende Bedingung wird somit zu

$$\frac{c_1}{C_2} (x_1 - x_2) > 0,00417$$

reducirt, und weil $x_1 - x_2$ annäherungsweise etwa $\sqrt{4 + (c^2/c_1^2)}$ ist, so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{c^2 + 4c_1^2}}{C_2} > 0,00417,$$

eine Bedingung²⁾, der kaum bei dieser Anordnung genügt werden konnte.

Wir gelangen daher zu der Schlussfolgerung, dass die örtlichen Schwingungen, die bei der Verzweigung hervorgebracht werden, neben den Schwingungen des secundären Stromes eine hervorragende Rolle spielen. Wie in (49) dargestellt wurde, ist das Product aus der Amplitude und der Frequenz dieser örtlichen Schwingungen in den Zweigen fast vollständig unabhängig von der Capacität C_2 des primären Condensators, und die Capacität kann somit nur den Zufluss der Elektrizität, welcher hauptsächlich von dem Gliede $\varepsilon - \gamma'$ bewirkt wird, beeinflussen. Daraus ergibt sich somit, dass die Zeitabstände

1) Vgl. K. R. Johnson, Ann. d. Phys. 3. p. 461—470. 1900.

2) In der That stellt sich die Bedingung noch ungünstiger, weil α aus dem Ohm'schen Widerstande des primären Kreises berechnet worden ist und demzufolge 81,8 ein allzu niedriger Wert von α ist.

der einzelnen Funken der Capacität C_2 proportional sein müssen, was durch die Beobachtungen wenigstens nicht widerlegt wird. Wenn die Beobachtungen diese Proportionalität nicht gut bestätigen, so ist dies eine ganz natürliche Folge, da die Anwesenheit von drei verschiedenen Oscillationen (oder nur wenigstens zwei) jedenfalls die Entladung sehr verwickelt macht. Aus dem Obigen ist es leicht einzusehen, dass die Potentialschwankungen, die von der secundären Spule des Inductors herrühren, neben den Oscillationen der Verzweigung keinen unmittelbaren Einfluss auf die Leitfähigkeit der Funkenstrecke ausüben, wodurch sie nur den Zufluss der Elektrizität beeinflussen und somit die von Hrn. Moll beobachteten periodischen Schwankungen der Zeitabstände bei beginnender Entladung bewirken.

Die stille Entladung.

Wenn man bedenkt, dass die Frequenz der Schwingungen, die örtlich in der Verzweigung hervorgebracht werden

$$\left(\frac{p_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{k_1}}{2\pi} \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{k_2}}{2\pi} \right)$$

von Selbstinductionscoefficienten, die Kupferdrähte von etwa 0,5 oder 1 m Länge besitzen, und von Capacitäten, die kleiner als die elektrostatische Einheit oder etwa 10^{-20} sind, herrühren, so ist leicht einzusehen, dass diese Schwingungen so schnell nacheinander folgen, dass, wenn von jeder Schwingung ein kleines Funkchen gebildet würde, diese Funkchen eine dauernde continuirliche Lichtempfindung geben würden. Unter dieser Voraussetzung sollte man somit eine der stillen Entladung entsprechende Erscheinung haben. Obwohl es somit aus dem Obigen hervorgeht, dass die stille Entladung wesentlich aus einer Reihe schnell aufeinander folgender Funkchen besteht, so steht jedoch nichts im Wege, dieselbe als eine continuirliche Erscheinung zu betrachten.

Zuerst soll die Beschreibung, die von Hrn. Moll im Anschluss der Tab. 7 und 8 gegeben wird, angeführt werden:

„Bei grösserem Betrage der Capacität ist die Entladungsart gewöhnlich die folgende: eine Reihe von elementaren Funken, mit gegen dem Ende zunehmenden Zeitabständen. Bei Verkleinerung der Capacität nimmt die Zahl der einzelnen

Funken zu. Anfangs sind sie sehr kräftig, werden aber bald abgeschwächt.“

„Wenn die Capacität noch mehr verkleinert wird, so wird die Entladung zum Teil continuirlich. Weil das continuirliche Licht auf dem lichtempfindlichen Papiere nicht zu wirken vermochte, so erschien auf den photographischen Aufnahmen nur ein Abbrechen in der Funkenreihe.“

„Die stille Entladung tritt nach einigen einzelnen Funken ein und eine grössere Anzahl von Funken folgen nach. Die Anfangs- und Endfunken sind oft sehr lichtschwach. Besonders gilt dies von dem letzten Anfangs- und dem ersten Endfunken. Es ist demzufolge manchmal schwierig zu entscheiden, wo die stille Entladung beginnt oder endet, und die Funkenzahlen in den Tab. 7 und 8 sind demzufolge nicht immer ganz sicher. Die Schwierigkeit, die Zahl der Funken zu berechnen, wird überdies von dem Naheliegen derselben vermehrt. Kräftig ist oft der erste Funke.“

„Bei abnehmender Capacität nimmt auch die Zahl der Anfangsfunken ab, und erreicht bald die Grenzzahl 1. Für eine Fernstrecke von 2 mm nimmt dabei die Zahl der Endfunken ebenso ab, was jedoch nicht bei 1 mm Funkenlänge der Fall ist. Um dieses Verhalten zu untersuchen wurden einige Ocularbeobachtungen ausgeführt, und es ergab sich dabei, dass die Funkenzahl im allgemeinen sehr variabel war. Bei bedeutender Funkenlänge (z. B. 4,5 mm) wurde die Zahl offenbar mit der Capacität vermindert, und wenn der Condensator weggenommen wurde, erhielt ich keinen einzigen Endfunken. Bei kleiner Funkenlänge (0,7 mm) wurde die Zahl, obwohl zuerst abnehmend, jedoch zuletzt vergrössert, denn bei der Entfernung des Condensators wurde eine sehr beträchtliche Funkenzahl erhalten.“

Die in Tab. 8 unter der horizontalen Linie angeführten Reihen, die unter dieselben Versuchsbedingungen wie die nächst obenstehenden ausgeführt worden sind, wurden an verschiedenen Tagen erhalten, und waren dabei Temperatur und Druck etwas abgeändert worden.

Wie aus dem Obigen hervorgeht, können die Funken nicht scharf bei der stillen Entladung getrennt werden; es liegt daher die Vermutung nahe, dass die Funken, die während

der stillen Entladung beobachtet worden sind, von einer Steigerung der Potentialdifferenz, die von den Schwingungen in der secundären Spule herrührt, oder vielleicht von einem Interferiren dieser Schwingungen mit den örtlichen Oscillationen in der Verzweigung abhängen. Da die Oscillationen unter Umständen drei verschiedene sein können, so kann dieses Verhalten wohl kaum berechnet werden.

Sieht man indessen von diesen Fünkchen ab, so kann man mit der stillen Entladung als einer continuirlichen Erscheinung rechnen, wenn man die einzelnen Fünkchen, aus welchen dieselbe wahrscheinlich besteht, durch eine continuirliche Strömung zwischen den Elektroden ersetzt und der Funkenreihe einen Widerstand ρ beilegt. Setzt man voraus, dass die zur Entladung nötigen Schwingungen vorhanden sind und regelmässig verlaufen, so wird überdies nur eine bestimmte Potentialdifferenz nötig, die wenigstens während der ganzen Entladungsdauer unterhalten werden muss. Wenn die Potentialdifferenz des Condensators dieselbe ist, wie für die Elektroden angenommen wird, und für dieselbe die aus der Gleichung (36) abgekürzte Gleichung

$$E_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2} \cdot (1 - e^{-\gamma t})$$

gilt, so wird während der Zeit dt eine Elektrizitätsmenge

$$C_2 dE_2 = \frac{M i_0}{W_2} \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma t} dt$$

dem Condensator und dem Funkenmikrometer zugeführt. Gleichzeitig wird von dem Funkenmikrometer die Menge

$$\frac{E_2}{\rho} dt$$

durch die Strömung weggenommen, die statt der einzelnen kleinen Fünkchen in Rechnung gezogen wird. Der Bedingung

$$(50) \quad \left(\frac{M i_0}{W_2} \cdot \gamma \cdot e^{-\gamma t} - \frac{E_2}{\rho} \right) dt \geq 0$$

muss somit während des Verlaufes der stillen Entladung genügt werden.

Es sei θ_0 die Zeit, zu welcher die stille Entladung beginnt, und E_2 die dafür nötige Potentialdifferenz, so ergibt sich somit

$$(51) \quad E_2 = \frac{M i_0}{C_2 W_2} (1 - e^{-\gamma \theta_0}).$$

Zwar braucht, wie aus den elektrostatischen Entladungen bekannt ist, der erste Funke eine etwas grössere Potentialdifferenz als die folgenden, und es scheint ebenso hier zu sein, denn die Entladung wird ja immer von einem schwachen Fünkchen eingeleitet; sieht man indessen davon ab, so gehören E_2 und θ_0 zusammen, wie in Gleichung (51) dargestellt wird. Ist ferner $\theta_0 + \theta$ die Zeit, zu welcher die stille Entladung abbricht, so erhält man aus der Gleichung (50)

$$\int_0^{\theta_0 + \theta} \left(\frac{M i_0}{W_2} \gamma e^{-\gamma t} - \frac{E_2}{C_2 q} \right) dt = \frac{M i_0}{W_2} \left[\left(\gamma + \frac{1}{C_2 q} \right) \frac{e^{-\gamma \theta_0} - e^{-\gamma (\theta_0 + \theta)}}{\gamma} - \frac{\theta + \theta_0}{C_2 q} \right] = 0,$$

wenn man voraussetzt, dass die stille Entladung sofort aufhört, wenn die Potentialdifferenz unter E_2 sinkt. Wird der Wert von $e^{-\gamma \theta_0}$ aus (51) in die obige Gleichung eingesetzt, so ergibt sich

$$\left(\gamma + \frac{1}{C_2 q} \right) \left(1 - \frac{C_2 W_2 E_2}{M i_0} \right) \left(\frac{1 - e^{-\gamma \theta}}{\gamma} \right) - \frac{\theta}{C_2 q} = 0$$

oder annäherungsweise

$$\left(\gamma + \frac{1}{C_2 q} \right) \left(1 - \frac{C_2 W_2 E_2}{M i_0} \right) \left(\theta - \frac{\gamma \theta^2}{2} \right) - \frac{\theta}{C_2 q} = 0.$$

Die Dauer der stillen Entladung ist somit

$$(52) \quad \theta = \frac{2}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \gamma C_2 q \right) \left(1 - \frac{C_2 W_2 E_2}{M i_0} \right)} \right)$$

Um die Bedingung (50) zu erfüllen, muss die Differenz

$$1 - \frac{C_2 W_2 E_2}{M i_0}$$

stets eine positive Grösse sein, und wenn die Capacität C_2 hinlänglich gross genommen wird, so ist demzufolge eine stille

Entladung unmöglich. Wenn C_2 so variiert wird, dass die Bedingung (50) stets erfüllt wird, so erreicht θ einmal ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem

$$\gamma C_2 \rho - \frac{C_2 W_2}{M i_0} > \text{oder} < 0 \text{ ist.}$$

Beim Variieren der Länge der Funkenstrecke ergibt sich etwa dasselbe, denn ρ und E'_2 nehmen alle beide mit der Funkenlänge zu.

(Eingegangen 6. November 1900.)

Nachtrag zur Correctur.

Aus der Gleichung (52), welche die Dauer der stillen Entladung θ enthält, lassen sich die zur Entladung nötige Potentialdifferenz und der Widerstand der Funkenstrecke berechnen. Die Constanten des Inductoriums sind aus den Messungen des Hrn. Holmberg bekannt¹⁾; die Dauer θ und die entsprechende Capacität C_2 sind in Tab. 8 angegeben worden. Bei einer Capacität von 23 elektrostatischen Einheiten oder $C_2 = (23/9) \cdot 10^{-20}$ ist die Dauer der ganzen Entladung 0,02171 Sec., und die Dauer der stillen Entladung beträgt davon 76,7 Proc. oder $\theta = 0,01665$ Sec. Bei der Capacität $C_2 = (31/9) \cdot 10^{-20}$ ist $\theta = 0,01289$ etc. Mittels dieser Angaben erhält man bei Einsetzen in (52) zwei Gleichungen, aus denen man

$$E'_2 = 1964000 \text{ Volt,}$$

$$\rho = 3126 \text{ Megohm}$$

erhält. Ferner ergibt sich aus den Capacitäten 23 und 67

$$E'_2 = 1860000 \text{ Volt,}$$

$$\rho = 2040 \text{ Megohm;}$$

aus den Capacitäten 31 und 78,5

$$E'_2 = 279000 \text{ Volt,}$$

$$\rho = 309 \text{ Megohm.}$$

¹⁾ Vgl. Ann. d. Phys. 3. p. 443. 1900.

Diese berechneten Zahlen sind ja voneinander ganz verschieden; es muss auch selbstverständlich so sein, denn der Funkenstrom kann nicht aus identisch gleichen elementaren Fünkchen bestehen, und daher müssen Schwankungen entstehen, die nicht bei den einzelnen Fällen gleichmässig verlaufen können. Die berechneten Werte scheinen somit die obige Annahme zu bestätigen, dass die stille Entladung nicht aus einer continuirlichen Strömung besteht, sondern aus einer Reihe elementarer Fünkchen, die einander so nahe folgen, dass sie im rotirenden Spiegel nicht getrennt wahrgenommen werden können.

Im Anschluss des oben Gesagten will ich hier an eine Arbeit von Hrn. Arrhenius erinnern, welche zu ähnlichen Resultaten führt.¹⁾ Die dabei geleisteten Angaben beziehen sich zwar auf sehr niedrige Drucke — die Entladung wurde in einer Vacuumröhre mittels einer Influenzmaschine erzeugt und ein secundärer Strom lief von einer Batterie zwischen zwei in die Röhre eingeschmolzenen Platindrähten durch dieselbe —, jedoch liefern diese Beobachtungen hinsichtlich sowohl der Grössenordnung der Widerstände als ihrer schwankenden Werte mit den obigen Berechnungen sehr ähnliche Resultate. Die Stärke des Stromes (i) wurde dabei unmittelbar mit dem Galvanometer gemessen und die Spannung (e) ist die elektromotorische Kraft der Batterie. Nehmen wir nun den Quotienten e/i als ein Maass des Widerstandes an, so ergibt sich:

1. Druck = 7,4 mm

$$e/i = \begin{cases} 83, & 33, & 31,7 \text{ Megohm;} \\ 2000 & \text{,,} \end{cases}$$

2. Druck = 4,4 mm

$$e/i = \begin{cases} 383, & 571, & 444 \text{ Megohm,} \\ 43, & 49, & 42, & 21 & \text{,, etc.} \end{cases}$$

Die elektromotorische Kraft der Batterie betrug dabei höchstens 40 Volt, und der Funkenstrom wurde unabhängig von der Batterie durch die Influenzmaschine dargestellt. Der Widerstand der verdünnten Luft ist ebenso in diesem Falle sehr schwankend und von derselben Grössenordnung, wie die

1) S. Arrhenius, Wied. Ann. 32. p. 545. 1887.

aus den Moll'schen Beobachtungen berechneten Werte. Nur die Spannung weicht von unserem E_2' besonders ab, und es ist ja eine wohl bekannte Thatsache, dass Funkenentladungen in verdünnten Gasen bei sehr niedriger Spannung stattfinden.

Die oben berechneten Werte ρ und E_2' können selbstverständlich keine Ansprüche der Genauigkeit erfüllen und ich hielt es deswegen anfangs nicht nötig, dieselben anzuführen. Wegen der eigentümlichen Schlussfolgerung, die von Hrn. Boynton hinsichtlich der Teslapule erreicht worden ist¹⁾, nämlich dass eine Funkenstrecke im Hochfrequenzfelde einen Widerstand von 10—100 Ohm besitzen soll, darf wohl die hier geleistete Berechnung nützlich sein. Trowbridge und Richards²⁾ geben einen Widerstand von 5—6 Ohm für eine Vacuumröhre an. Die experimentelle Grundlage dieser Anschauung haben die letzteren durch einen Stromkreis erzielt, der drei Unstetigkeitsstellen enthält, nämlich einen Wasserwiderstand, eine Vacuumröhre und eine Funkenstrecke, und die Beobachtungen sind nicht derart, dass sie eine Prüfung zugeben. Der Widerstand 10—100 Ohm wird von Hrn. Boynton zuerst mittels drei bedenklicher Annahmen erreicht, nämlich:

1. dass die zur Entladung nötige Potentialdifferenz bei dem Teslatransformator dieselbe wie bei den elektrostatischen Entladungen sein sollte;
2. dass der Strom der Secundärspule unvermindert durch die Funkenstrecke gehe, und
3. dass der Widerstand eines metallischen Leiters bei sehr hoher Frequenz nicht demselben Gesetz wie bei Wechselströmen folgt.

Wenn man so viele Annahmen braucht, um der Funkenstrecke eine besondere Leitfähigkeit zu erteilen, so scheint es wohl besser, diese hypothetische Leitfähigkeit fahren zu lassen.

1) W. P. Boynton, Phil. Mag. 46. p. 312. 1898.

2) J. Trowbridge u. W. Richards, Phil. Mag. 43. p. 349. 1897.

(Eingegangen 2. December 1900.)

9. Ueber die Oberflächenspannung; von H. Hulshof.

Der Zweck dieser Abhandlung ist zu zeigen, dass man aus den Annahmen, worauf die Zustandsgleichung sich stützt, in der Supposition von continuirlicher Dichtigkeitsänderung in der capillaren Schicht, zum Schluss kommen kann, dass eine Oberflächenspannung existirt. Die Grösse dieser Oberflächenspannung wird für die Oberflächenenergie einen Wert liefern, welcher ganz derselbe ist als der von der thermodynamischen Theorie von J. D. van der Waals gefundene, nämlich die Molecularconstante σ .¹⁾

Wir wollen uns eine Flüssigkeit denken, über welcher sich gesättigter Dampf befindet. Die Oberflächenschicht sei horizontal, wiewohl wir äussere Kräfte wie zum Beispiel die Schwerkraft ausschliessen. Den Uebergang der Flüssigkeitsphase zu der Dampfphase nehmen wir continuirlich an. Die Voraussetzung von continuirlicher Dichtigkeitsänderung bringt mit sich, dass in der capillaren Schicht alle Dichtigkeiten zwischen der Dichtigkeit der Flüssigkeit und des gesättigten Dampfes anwesend sind. Doch darf man daraus nicht schliessen, dass die Zustände, durch die Isotherme vorgestellt, in der capillaren Schicht auftreten werden. Denn die Zustände, durch die verschiedenen Punkte der Isotherme vorgestellt, setzen bestimmt homogene Zerteilung der Materie voraus. Nur die Grössen, welche durch die Geschwindigkeit der molecularen Bewegung und durch die Dichte bestimmt sind, werden in der Uebergangsschicht denselben Wert haben als bei homogener Stoffzerteilung. Ebenso wie dies mit der Entropie der Fall ist (J. D. van der Waals), wird auch der thermische Druck (θ) nur abhängig sein von der Dichte (ρ) und von der Temperatur (t).

1) J. D. van der Waals, Zeitschr. f. Physik. Chem. 13. p. 657 bis 725. 1894.

Der thermische Druck ist die Summe des Moleculardrucks und des äusseren Drucks (p). Wenn wir als Isotherme nehmen nicht die Linie $p = f_1(v, t_1)$, sondern $\vartheta = f_2(v, t_1)$, worin $v = 1/\rho$, werden wir also sagen können, dass in diesem Falle die Zustände, vorgestellt durch die Punkte der Isotherme zwischen dem homogenen Flüssigkeits- und Dampfvolumen in der Uebergangsschicht anwesend sind.

Der Moleculardruck ist die directe Folge der Attraction der Teilchen und soll also in einem Punkte bestimmt werden aus dem Zustande der Umgebung. Wenn die moleculare Wirkung sich nur ausdehnt zu Entfernungen, welche so klein

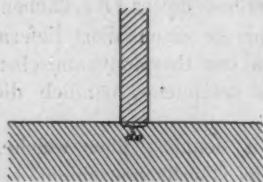


Fig. 1.

sind als gewöhnlich angenommen wird, lässt sich dies sofort erklären; aber auch wenn die Attractionssphäre grösser sein sollte, lässt sich eine moleculare Wirkung denken, welche diese Voraussetzung rechtfertigt. Man definiere den Moleculardruck pro Flächenelement do als die Kraft, mit der

aller Stoff, an der einen Seite der platten Fläche, worin do liegt, die stoffliche Säule, welche do zur Grundfläche hat, an der anderen Seite der Fläche liegend und senkrecht darauf ruhend, anzieht in der Richtung senkrecht auf dieser Fläche.

In homogenen Phasen liefert diese Definition des Moleculardrucks vollkommen den gleichen Wert als die Definition, welche denselben an den Grenzen berechnet. Wenn die Stoffverteilung nicht homogen ist, wird der Moleculardruck in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte haben. *Der That- sache, dass in der Uebergangsschicht der Moleculardruck in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels einen anderen Wert haben wird als in der Richtung senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel, wird das Vorhandensein der Oberflächenspannung zugeschrieben werden müssen.*

Zur Berechnung der Grösse des Moleculardrucks werden wir die moleculare Structur ausser Acht lassen und uns den Stoff continuirlich über den von demselben eingenommenen Raum verteilt denken. Wir folgen dabei vorläufig den Weg, den in der thermodynamischen Theorie van der Waals betritt zur

Berechnung der potentiellen Energie. Wir bestimmen zuerst die Attraction, welche eine flache Schicht mit einer Dicke du und mit einer constanten Dichte ρ ausüben wird auf die Masseneinheit, in einer Entfernung u von dieser Schicht. Wir schneiden zu dem Ende aus der flachen Schicht einen Ring und zwar so, dass der Mittelpunkt dieses Ringes zusammenfällt mit dem Fusspunkt der Senkrechte, aus dem Punkte, wo die Masseneinheit concentrirt ist, auf die flache Schicht niedergelassen. Der Radius dieses Ringes sei t und der Inhalt $2\pi t dt du$, dann wird der Component der Attraction in der Richtung senkrecht auf der flachen Schicht sein

$$\rho 2\pi t dt du \frac{u}{r} \Phi(r).$$

wenn ρ die constante Dichtigkeit in der Schicht, r die Entfernung unserer Masseneinheit von den Theilen des Ringes und $\Phi(r)$ die Kraft ist, mit welcher zwei Masseneinheiten in einer Entfernung r sich anziehen.

Durch die ganze Schicht wird also eine Attraction ausgeübt:

$$\rho \int_{t=0}^{t=\infty} 2\pi t dt du \frac{u}{r} \Phi(r).$$

Bei Integration nach t , während u constant bleibt, gilt, da $r^2 = u^2 + t^2$, dass $2r dr = 2t dt$ und die Attraction kann deshalb auch dargestellt werden durch

$$\rho \int_{r=u}^{r=\infty} 2\pi u du \Phi(r) dr.$$

Wir setzen $d\zeta(r) = -\Phi(r) dr$, und nehmen hierbei an, dass $\zeta(\infty) = 0$, und also geht unser Ausdruck für die Attraction über in

$$\rho 2\pi u \zeta(u) du.$$

Wir setzen nun $2\pi u \zeta(u) du = -d\psi(u)$, sodass

$$\psi(u) = \int_u^{\infty} 2\pi u \zeta(u) du,$$

worin wieder für Werte von u , grösser als die Wirkungskphäre $\psi(u)$ sowohl als $\zeta(u)$ Null wird.

Die Attraction durch die ganze flache Schicht, mit der Dicke du , ausgeübt auf die Masseneinheit in der Richtung senkrecht auf der Schicht wird deshalb

$$- \rho d\psi(u).$$

Hieraus geht hervor, dass $\psi(u)$ vorstellt die normale Componente der Attraction, ausgeübt auf die Masseneinheit durch alle Schichten, welche weiter als u von dieser Einheit entfernt sind, wenn in allen Schichten die Dichtigkeit die Dichtigkeitseinheit ist.

Denken wir uns jetzt eine, durch eine platte Fläche begrenzte, Flüssigkeitsmasse, deren Dichte ρ überall, also auch in der Grenzschicht, constant ist, und berechnen wir jetzt die

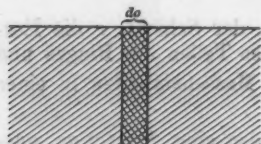


Fig. 2.

Kraft, mit welcher eine unendlich dünne Säule zur Dicke d_o , die wir senkrecht auf der Oberfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel zur abgrenzenden Fläche aus der Flüssigkeitsmasse herausgeschnitten denken, nach innen gezogen

wird. Wir nehmen aus dieser Säule ein Stück, zur Dicke du , in einer Entfernung u von der Oberfläche. Diese Masse $\rho d_o du$ erleidet nur als Resultante der verschiedenen Anziehungen eine Attraction senkrecht auf der Oberfläche in Folge der Anwesenheit der Schichten, welche weiter als $2u$ von dem Flüssigkeitsspiegel entfernt sind. Die Kraft, womit dieser Teil der Säule nach innen gezogen wird, ist mithin

$$\rho^2 d_o \psi(u) du$$

und die Kraft, womit die ganze Säule nach innen gezogen wird, ist

$$d_o \rho^2 \int_0^{\infty} \psi(u) du.^1)$$

1) Dieses bestimmte Integral

$$\int_0^{\infty} \psi(u) du$$

ist die Grösse K von Laplace für eine Dichtigkeit gleich der Einheit.

Wenn wir nun aber die Säule nicht nehmen in der Flüssigkeitsmasse, sondern ruhend senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel (Fig. 1), dann werden wir für die Attraction, welche die Säule von der Flüssigkeit erleiden würde, einen Wert finden, ebenso gross als wenn die Säule aus der Flüssigkeit herausgeschnitten wäre. Schneiden wir doch in einer Entfernung u , über dem Flüssigkeitsspiegel, zur Dicke du , ein Stück aus dieser Säule, mit einer Masse $\rho d o d u$, dann wird dieser Teil der Säule eine Attraction

$$\rho^2 d o \psi(u) du$$

erleiden und die ganze Säule also eine Attraction

$$\rho^2 d o \int_0^{\infty} \psi(u) du.$$

In homogenen Phasen werden die beiden Definitionen des Moleculardrucks also für die Grösse desselben denselben Wert liefern.

Wir nehmen an, dass der Uebergang des gesättigten Dampfzustandes zum flüssigen Zustande continuirlich sei. Wir nehmen eine flache horizontale Grenzschicht und beabsichtigen, in einem Punkte der capillaren Schicht den Moleculardruck zu bestimmen und zwar in zwei Richtungen:

1. in der Richtung senkrecht auf der Oberfläche der Flüssigkeit;
2. in der Richtung der Flüssigkeitsoberfläche.



Fig. 3.

a) Bei der Bestimmung des Moleculardruckes in A in der Richtung senkrecht zur Oberfläche denken wir uns eine Fläche durch A , parallel mit der Oberfläche; ferner in A eine Säule, von der Dicke $d o$, senkrecht auf der durch A gehenden Fläche. Der Moleculardruck, den wir suchen, ist also für die Fläche $d o$

die Kraft, womit alle Flüssigkeitsteilchen unter A , die Säule, in soweit dieselbe auf der durch A gehenden Fläche ruht, anziehen in der Richtung senkrecht auf dieser Fläche. Die Kraft, mit welcher die Schicht von der Dicke du , parallel mit der Grenzfläche, in einer Entfernung u unter A , die Masseneinheit in S , welche h_1 Centimeter über A gelegen ist, anzieht, ist:

$$- d\psi(u + h_1),$$

in der Voraussetzung, dass die betrachtete Schicht die Einheit der Dichtigkeit hat.

Die Dichtigkeit in einer Schicht parallel mit der Oberfläche der Flüssigkeit ist überall die nämliche. Wir geben also die Dichtigkeit in einem Punkte als eine Function der Entfernung dieses Punktes zu der durch A gebrachten Fläche. Nennen wir die Normale h und rechnen wir die positive Seite, gerichtet nach der Seite der Dampfphase, so wird die Dichtigkeit in der betrachteten Schicht zur Dicke du sein:

$$\rho - u \frac{d\rho}{dh} + \frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\rho}{dh^2} - \text{etc.},$$

worin ρ , $d\rho/dh$, $d^2\rho/dh^2$ die Werte haben, welche diese Grössen im Punkte A haben. Die weiteren Glieder werden wir vernachlässigen.

Für alle Schichten unter der Fläche durch A wird also die Attraction sein:

$$\int_{u=0}^{u=\infty} - \left(\rho - u \frac{d\rho}{dh} + \frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\rho}{dh^2} \right) d\psi(u + h_1).$$

Denken wir uns nun in S nicht die Masseneinheit, sondern nehmen wir hier ein Volumenelement zur Dicke dh_1 und der Einfachheit wegen mit einem Durchschnitt von 1 cm^2 , statt des Durchschnittes do , so kann, da die Dichtigkeit in diesem Volumenelement

$$\rho + \frac{d\rho}{dh} h_1 + \frac{d^2\rho}{dh^2} \frac{h_1^2}{1.2} + \text{etc.}$$

ist, die zu berechnende Attraction dargestellt werden durch:

$$\int_0^{\infty} \left(\varrho + h_1 \frac{d\varrho}{dh} + \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \right) dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} - \left(\varrho - u \frac{d\varrho}{dh} + \frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \right) d\psi(u + h_1).$$

$$\int_{u=0}^{u=\infty} -\varrho d\psi(u + h_1) = \varrho \psi(h_1).$$

$$\int_{u=0}^{u=\infty} u \frac{d\varrho}{dh} d\psi(u + h_1) = \left[u \frac{d\varrho}{dh} \psi(u + h_1) \right]_0^{\infty} - \frac{d\varrho}{dh} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) du.$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null; für $u = 0$, da der Factor u alsdann Null ist; für $u = \infty$ ist $\psi(u + h_1) = 0$.

$$\int_{u=0}^{u=\infty} -\frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} d\psi(u + h_1) = \left[-\frac{u^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \psi(u + h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} + \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) u du.$$

Das integrierte Glied ist abermals Null für beide Grenzen. Das Integral wird also

$$\int_0^{\infty} \left(\varrho + h_1 \frac{d\varrho}{dh} + \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \right) dh_1 \left[\varrho \psi(h_1) - \frac{d\varrho}{dh} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) du + \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) u du \right]. \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (1') \quad (2')$$

$$+ \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u + h_1) u du \quad (3')$$

$$(1) \quad (1') \quad \int_0^{\infty} \varrho dh_1 \varrho \psi(h_1) = \varrho^2 \int_0^{\infty} \psi(h_1) dh_1 = a \varrho^2.$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (2) \quad & - \int_0^{\infty} \varrho \, d h_1 \frac{d \varrho}{d h} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) \, d u \\ & = - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) \, d u. \end{aligned} \right.$$

Wir nehmen $\psi(x) dx = -d\pi(x)$, indem wir voraussetzen dürfen, dass $\pi(\infty)$ gleich Null, ebenso wie $\psi(\infty) = 0$ ist.

Der letzte Ausdruck wird

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} d \pi(u+h_1) &= \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} d h_1 \left[\pi(u+h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} \\ &= - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} \pi(h_1) \, d h_1 = - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \left[h_1 \pi(h_1) \right]_0^{\infty} \\ &\quad + \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} h_1 \, d \pi(h_1). \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null; für $h_1=0$, da der Factor h_1 alsdann Null ist; für $h_1=\infty$ ist $\pi(h_1)=0$.

Der letzte Ausdruck wird also

$$\begin{aligned} & - \varrho \frac{d \varrho}{d h} \int_0^{\infty} h_1 \psi(h_1) \, d h_1. \\ (1) \quad \left\{ \begin{aligned} (3) \quad & \int_0^{\infty} \varrho \, d h_1 \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) \, u \, d u \\ & = - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} u \, d \pi(u+h_1) \\ & = - \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} d h_1 \left[u \pi(u+h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} \\ & \quad + \varrho \frac{d^2 \varrho}{d h^2} \int_0^{\infty} d h_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \pi(u+h_1) \, d u. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null.

Wir nehmen $\pi(x) dx = -d\chi(x)$, indem wir die Annahme machen, dass $\chi(\infty) = 0$.

Der letzte Ausdruck wird also

$$\begin{aligned} & -\varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} d\chi(u+h_1) \\ & = -\varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty dh_1 \left[\chi(u+h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty}. \end{aligned}$$

$\chi(u+h_1)$ ist gleich Null für $u=\infty$ und $\chi(h_1)$ für $u=0$, also wird der Ausdruck

$$\begin{aligned} & + \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \chi(h_1) dh_1 = \left[\varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} h_1 \chi(h_1) \right]_0^\infty \\ & + \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty h_1 \pi(h_1) dh_1. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null, also wird der letzte Ausdruck

$$\begin{aligned} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \pi(h_1) d\frac{h_1^2}{2} & = \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \left[\pi(h_1) \frac{h_1^2}{2} \right]_0^\infty \\ & + \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null und der Ausdruck wird

$$\begin{aligned} & \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1 \\ (2) (1') \quad \int_0^\infty h_1 \frac{d\varrho}{dh} \varrho \psi(h_1) dh_1 & = \varrho \frac{d\varrho}{dh} \int_0^\infty h_1 \psi(h_1) dh_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (2') \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & - \int_0^{\infty} h_1 \frac{d\varrho}{dh} dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \frac{d\varrho}{dh} \psi(u+h_1) du \\
 & = - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} h_1 dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) du \\
 & = \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} h_1 dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} d\pi(u+h_1) \\
 & = \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} h_1 dh_1 \left[\pi(u+h_1) \right]_{u=0}^{u=\infty} \\
 & = - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} \pi(h_1) h_1 dh_1 = - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} \pi(h_1) d\frac{h_1^2}{2} \\
 & = - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \left[\pi(h_1) \frac{h_1^2}{2} \right]_0^{\infty} - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null und der Ausdruck wird

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)' \int_0^{\infty} \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1. \\
 (2) \quad (3') \quad & \left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} h_1 \frac{d\varrho}{dh} dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \psi(u+h_1) u du \\
 & = \frac{d\varrho}{dh} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_0^{\infty} h_1 dh_1 \int_{u=0}^{u=\infty} \psi(u+h_1) u du.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist von der Dimension

$$\int_0^{\infty} h_1^2 \psi(h_1) dh_1$$

und wird von uns vernachlässigt werden.

$$(3) (1') \quad \int_0^\infty \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} dh_1 \varrho \psi(h_1) = \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1.$$

$$(3) (2') \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^\infty - \frac{h_1^2}{1.2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} dh_1 \frac{d\varrho}{dh} \int_{u=0}^\infty \psi(u+h_1) du \\ & = \frac{d\varrho}{dh} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} dh_1 \int_0^\infty \psi(u+h_1) dh_1. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls wie (3) (3') von einer solchen Dimension, dass wir ihn vernachlässigen können.

Für den Moleculardruck in der Richtung senkrecht zur Oberfläche finden wir also

$$\begin{aligned} a \varrho^2 - \varrho \frac{d\varrho}{dh} \int_0^\infty h_1 \psi(h_1) dh_1 + \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1 \\ + \varrho \frac{d\varrho}{dh} \int_0^\infty h_1 \psi(h_1) dh_1 - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1 \\ + \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1, \end{aligned}$$

oder

$$a \varrho^2 + \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1 - \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1.$$

Die Glieder, die sich gegenseitig aufheben, sind die, welche das Zeichen ändern, wenn wir die Richtung, in welcher wir h rechnen, umkehren.

Wir setzen

$$\int_0^\infty h_1 \psi(h_1) dh_1 = c_1 \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{h_1^2}{2} \psi(h_1) dh_1 = c_2.$$

Für den Wert des Moleculardruckes in der Richtung senkrecht zur Oberfläche finden wir also

$$a \varrho^2 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} - c_1 \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2.$$

Vermehren wir diesen Moleculardruck mit dem äusseren Druck p_1 , dann dürfen wir die Summe gleichstellen mit $p + a \rho^2$, wenn p den Druck darstellt, der zu einem Zustande in homogener Phase der Dichtigkeit ρ gehört.

$$p_1 + a \rho^2 + c_2 \rho \frac{d^2 \rho}{dh^2} - \frac{c_2}{2} \left(\frac{d \rho}{dh} \right)^2 = p + a \rho^2.$$

$$p_1 - p = -c_2 \rho \frac{d^2 \rho}{dh^2} + \frac{c_2}{2} \left(\frac{d \rho}{dh} \right)^2. \quad (2)$$

Dieses Verhältnis ist dasselbe, welches van der Waals in seiner „Thermodynamischen Theorie der Capillarität“ abgeleitet hat.

b) Berechnen wir jetzt den Moleculardruck in demselben Punkte A , aber in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels. Wir denken uns zu dem Ende eine Fläche PQ durch A , senkrecht zur Oberfläche. In A denken wir uns senkrecht zu dieser

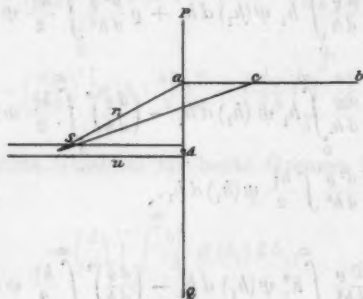


Fig. 4.

Fläche eine Säule von der Dicke $d\sigma$. Die Kraft, womit diese Säule angezogen wird in der Richtung senkrecht zur Fläche von allem Stoff, der an der anderen Seite der Fläche liegt, ist der zu berechnende Moleculardruck. Der Stoff in der Säule hat überall dieselbe Dichte.

Die Masseneinheit in S wirkt auf die Masseneinheit in c mit einer Kraft $\Phi(r)$, wenn r die Entfernung Sc vorstellt. Die Componente dieser Kraft in der Richtung senkrecht auf PQ ist $\Phi(r) \cos cSA$ oder, wenn wir die Richtung ab z nennen, $\Phi(r)(dr/dz)$. Die materielle Linie ab , der Dicke $d\sigma$, mit einer Dichtigkeit, welche überall dieselbe, und zwar die

Dichtigkeitseinheit ist, wirkt also mit einer Kraft, von der die Componente in der Richtung senkrecht auf PQ ist

$$d o \int_{r=r_1}^{r=\infty} \Phi(r) \frac{dr}{dz} dz = d o \int_{r_1}^{\infty} \Phi(r) dr = d o \zeta(r_1),$$

wobei wir wieder annehmen, dass $d\zeta(r) = -\Phi(r) dr$.

Denken wir uns jetzt in der Fläche PQ ein Polarcoordinatensystem mit A als Ursprung und einer Linie senkrecht auf der Zeichnungsfläche als feste Axe. Ein Flächenelement stellen wir vor durch $y dy d\varphi$. Die Dichte in A sei ϱ , dann ist in einem willkürlichen Punkte dieser Fläche die Dichte

$$\varrho + \frac{d\varrho}{dh} y \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} y^2 \sin^2 \varphi \text{ etc.}$$

Das Glied $(d\varrho/dh)y \sin \varphi$ macht, dass in einem Punkte in der Fläche PQ über A ebensoviel Stoff weniger anwesend ist als in A , als in einem anderen Punkte in der Fläche PQ ebenso tief unter A mehr ist als in A .

Wären also die Glieder

$$\varrho - \frac{d\varrho}{dh} y \sin \varphi$$

allein da, so würde die Attraction, welche der Stoff rechts von PQ ausübte auf die Masseneinheit in S , in der Richtung senkrecht auf PQ dieselbe sein, als bei gleichmässiger Dichte und also sein

$$\varrho \psi(u).$$

Dazu kommt jetzt

$$\int_{y=0}^{y=\infty} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{1}{2} \zeta(r) \frac{d^2\varrho}{dh^2} y^2 \sin^2 \varphi y dy d\varphi,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

also wird der Ausdruck

$$\frac{1}{2} \frac{d^2\varrho}{dh^2} \int_{y=0}^{y=\infty} \zeta(r) \pi y^3 dy.$$

Wir wissen, dass $r^2 = y^2 + u^2$ und also $r dr = y dy$, sodass das Integral übergeht in

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_{r=u}^{r=\infty} 2 \pi \zeta(r) (r^2 - u^2) r dr &= -\frac{1}{4} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_{r=u}^{r=\infty} (r^2 - u^2) d\psi(r) \\ &= -\left[\frac{1}{4} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} (r^2 - u^2) \psi(r) \right]_u^\infty + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_u^\infty \psi(r) r dr. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null.

Wir finden also als Componente der Attraction in der Richtung senkrecht auf PQ

$$\varrho \psi(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_u^\infty \psi(r) r dr,$$

und für die Attraction der ganzen Säule

$$\begin{aligned} d\sigma' \int_0^\infty \varrho du \left[\varrho \psi(u) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_u^\infty \psi(r) r dr \right] &= d\sigma' \varrho^2 \int_0^\infty \psi(u) du \\ &\quad - d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \int_u^\infty r d\pi(r). \end{aligned}$$

Dieses letzte Glied wird

$$\begin{aligned} &- d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \left[r \pi(r) \right]_u^\infty + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \int_u^\infty \pi(r) dr \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du - d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \int_u^\infty d\chi(r) \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du - d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty du \left[\chi(u) \right]_u^\infty \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \chi(u) du \\ &= d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \left[u \chi(u) \right]_0^\infty \\ &\quad + d\sigma' \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du. \end{aligned}$$

Das integrierte Glied ist für beide Grenzen Null, also geht unser Ausdruck über in

$$\begin{aligned} d\sigma' \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u \pi(u) du &= d\sigma' \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty \frac{1}{2} \pi(u) du^2 \\ &= d\sigma' \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \left[\frac{1}{2} \pi(u) u^2 \right]_0^\infty + \frac{1}{2} d\sigma' \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u^2 \psi(u) du. \end{aligned}$$

Das erste Glied ist für beide Grenzen Null und demnach wird die Attraction, ausgeübt auf die ganze Säule,

$$d\sigma' \left\{ \varrho^2 \int_0^\infty \psi(u) du + \frac{1}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \int_0^\infty u^2 \psi(u) du \right\},$$

wofür wir also setzen dürfen

$$d\sigma' \left\{ a \varrho^3 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} \right\}.$$

Der Moleculardruck im Punkte *A* in der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht ist also

$$a \varrho^3 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2}.$$

Wir finden folglich für die Grösse des Moleculardruckes in einem Punkte der Uebergangsschicht, wo die Dichte ϱ ist:

a) In der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht

$$a \varrho^3 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2} \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2.$$

b) In der Richtung der capillaren Schicht

$$a \varrho^3 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2}.$$

Wir kommen also zum Schlusse, dass in der capillaren Schicht der Moleculardruck infolge der Attraction, welche die Theilchen aufeinander ausüben, in verschiedener Richtung einen verschiedenen Wert hat. In dieser Thatsache muss die Erklärung

der Existenz der Oberflächenspannung gesucht werden. Die Folge der Attraction wird also sein, dass in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels die Oberfläche der Flüssigkeit sich zu verkleinern streben wird mit einer Kraft, entsprechend der Differenz des Moleculardruckes in der Richtung der capillaren Schicht und in der Richtung senkrecht darauf, also

$$\frac{c_2}{2} \rho \frac{d^2 q}{dh^2} - c_2 \rho \frac{d^2 q}{dh^2} + \frac{c_2}{2} \left(\frac{dq}{dh} \right)^2 = - \frac{c_2}{2} \rho \frac{d^2 q}{dh^2} + \frac{c_2}{2} \left(\frac{dq}{dh} \right)^2.$$

Die Kraft, welche die Oberfläche zu verkleinern sucht, dieser moleculare Ueberdruck in der Richtung der Grenzschicht, wird gerechnet pro Flächeneinheit, sodass wir für die Oberflächenspannung finden:

$$\int \left\{ - \frac{c_2}{2} \rho \frac{d^2 q}{dh^2} + \frac{c_2}{2} \left(\frac{dq}{dh} \right)^2 \right\} dh,$$

welches Integral über die ganze Dicke der capillaren Schicht genommen werden soll.

Wenn wir auf die moleculare Structur und den Bewegungszustand der Theilchen achten, können wir uns die Existenz der Oberflächenspannung auch in anderer Weise vorstellen. Die kinetische Gastheorie fordert ja, dass die durchschnittliche kinetische Energie der progressiven Bewegung der Theilchen bei gleicher Temperatur constant ist und dass keine bevorzugte Richtung für die Bewegung besteht. Die Zustandsgleichung giebt uns das Verhältnis

$$\vartheta = \frac{Rt}{v - b}.$$

In einem Punkte der Uebergangsschicht wird ϑ (der thermische Druck, die Summe des Moleculardruckes und des äusseren Druckes) einen Wert haben, welcher in allen Richtungen derselbe ist, was nicht für den Moleculardruck gilt und also auch nicht für dasjenige, was wir als äusseren Druck rechnen müssen. Demnach wird die Attraction der Theilchen und der Bewegungszustand, worin sie sich befinden, zur Folge haben, dass in der capillaren Schicht ein solcher Zustand eintritt, dass dasjenige, was wir als Druck rechnen müssen, in verschiedenen Richtungen verschieden ist. Nennen wir den Druck

in der Richtung senkrecht auf dem Flüssigkeitsspiegel p_1 , den in der Richtung parallel mit dem Flüssigkeitsspiegel p_2 , dann wird gelten müssen

$$p_1 + a \varrho^2 + c_2 \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2} \varrho \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 = p_2 + a \varrho^2 + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2},$$

oder

$$p_1 - p_2 = -\frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2} \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2.$$

Zur Berechnung der Oberflächenspannung denke man sich senkrecht auf der capillaren Schicht eine platte Fläche, mit einer Dimension von 1 cm in der Richtung des Flüssigkeitsspiegels, mit einer Höhe, der Dicke der capillaren Schicht entsprechend. Die Druckdifferenz $p_1 - p_2$, integrirt über diese Fläche, wird den Wert der Oberflächenspannung geben. Die Arbeit, welche dazu nötig ist, die Oberfläche um 1 cm² zu vergrößern, kann durch den nämlichen Ausdruck dargestellt werden:

$$\sigma = \int \left\{ -\frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} + \frac{c_2}{2} \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 \right\} dh.$$

Die beiden Glieder dieses Integrales haben denselben Wert:¹⁾

$$\frac{c_2}{2} \int \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 dh = \frac{c_2}{2} \int \frac{d\varrho}{dh} d\varrho = \frac{c_2}{2} \left[\varrho \frac{d\varrho}{dh} \right]_{\varrho_1}^{\varrho_2} - \frac{c_2}{2} \int \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} dh.$$

Das integrirte Glied ist Null, da das Integral über die ganze Dicke der capillaren Schicht ausgedehnt werden muss, und $d\varrho/dh$ ebensowohl in der Flüssigkeits- als in der Dampfphase Null ist.

Deshalb

$$\sigma = -c_2 \int \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2} dh$$

oder

$$\sigma = c_2 \int \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 dh.$$

Wir kommen also zur Folgerung, dass wirklich in der capillaren Schicht eine Spannung existirt, welche die Oberfläche zu verkleinern suchen wird, da die zweite Form, unter welcher wir den Ausdruck für σ gebracht haben, positiv ist.

1) van der Waals, Zeitschr. f. Phys. Chem. 13. 1894.

Diese Spannung herrscht ausschliesslich in der Uebergangsschicht und wird bei unveränderter Temperatur einen constanten Wert haben. Zu der Grösse dieser Spannung liefern die verschiedenen Schichten ganz verschiedene Beiträge. Wir können den Wert desjenigen, was wir als Druck in der Richtung senkrecht auf der Oberfläche und in der Richtung der capillaren Schicht zu betrachten haben, als Functionen von $1/\varrho$, hinsichtlich der theoretischen und empirischen Isothermen, durch eine graphische Darstellung leicht annähernd darstellen.

p_1 bedeutet den Druck in der Richtung senkrecht auf der capillaren Schicht, den Druck des gesättigten Dampfes; p_2 den Druck in der Richtung der capillaren Schicht; p den Druck, welcher zu einer homogenen Phase der Dichte ϱ gehört.

$$p_1 = \text{const.},$$

$$p = \frac{RT}{\frac{1}{\varrho} - b} - a\varrho^2.$$

Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} p_1 + a\varrho^2 + c_2\varrho \frac{d^2\varrho}{dh^2} - \frac{c_2}{2} \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2 &= p_2 + a\varrho^2 \\ + \frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2\varrho}{dh^2} &= p + a\varrho^2. \end{aligned}$$

Die Supposition eines continuirlichen Ueberganges des Dampfes zur Flüssigkeit schliesst in sich, dass $d^2\varrho/dh^2$ an der Flüssigkeitsphase einen negativen, an der Dampfphase einen positiven Wert hat. Da, wo $d^2\varrho/dh^2$ einen Wert gleich Null hat, ist $d\varrho/dh$ maximal. Wo

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

die theoretische Isotherme schneidet, ist

$$\frac{d^2\varrho}{dh^2} = 0.$$

Für das, zu diesem Schnittpunkt gehörende ϱ , wird also gelten

$$p_1 - p_2 = \frac{c_2}{2} \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^2,$$

woraus hervorgeht, dass der Schnittpunkt mehr nach der Seite der grösseren Densitäten liegt als der Schnittpunkt der theoretischen und empirischen Isothermen. Da

$$p_2 - p = -\frac{c_2}{2} \varrho \frac{d^2 \varrho}{dh^2},$$

so geht hervor, dass an der Seite der grösseren Densitäten die Linie

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

oberhalb und an der Seite der kleineren Densitäten unterhalb der theoretischen Isotherme liegt, sodass, in Hinsicht auf den Schnittpunkt der empirischen und theoretischen Isothermen, der Schnittpunkt der Linie

$$p_2 = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

mit den empirischen Isothermen an der Seite der kleineren Densitäten liegt. Dieser letzte Schnittpunkt bildet die Grenze zwischen den Densitäten, welche die Oberflächenspannung vergrössern und verkleinern. *Die grösseren Densitäten liefern nämlich positive Beiträge und die kleineren Densitäten negative Beiträge für die Oberflächenspannung.* In den Schichten der kleineren Densitäten müssen wir den Druck in der Richtung der capillaren Schicht als grösser, in den Schichten mit grösserer Dichte als kleiner wie den Druck p_1 betrachten. *Dasjenige also, was als ausgedehnte Flüssigkeit betrachtet werden kann, wird die Oberflächenspannung vergrössern, was als zusammengepresster Dampf betrachtet werden muss, wird sie verkleinern.¹⁾*

Denken wir uns ein Flüssigkeitshäutchen, das wir ausrecken wollen. Um die Oberfläche des Häutchens mit der Oberflächeneinheit zu vergrössern, haben wir eine Arbeit zu verrichten

$$\int (p_1 - p_2) dh.$$

Wenn wir von einer Flüssigkeit die Oberfläche vergrössern, ziehen wir dabei keine Teilchen in die capillare Schicht. Nach

1) Das nämliche schliesst van der Waals für die Oberflächenenergie.

unserer Auffassung vom Wesen der Wärme kann dies nicht der Fall sein, sondern wird der Bewegungszustand, worin die Molecüle sich befinden, verursachen, dass sie sofort die Plätze, welche ihnen eingeräumt werden, einnehmen, während sie weiter die Vergrösserung der Oberfläche unterstützen werden, indem sie in der Richtung der Ausdehnung einen Druck

$$\int p_2 dh$$

ausüben.

Wir können dasjenige, was geschieht, bei der Vergrösserung der Oberfläche, z. B. beim Ausrecken eines Häutchens, das wir eine constante Temperatur behalten lassen, vergleichen mit demjenigen, was geschieht, wenn wir eine Flüssigkeit, über welcher sich gesättigter Dampf befindet, in eine Umgebung bringen, von der die Spannung grösser ist als die Spannung des gesättigten Dampfes. Denken wir uns in einem cylinderförmigen Fass, das geschlossen ist mittels eines Saugers ohne Gewicht und ohne Reibung, eine Flüssigkeit, über welcher sich Dampf befindet. Die Temperatur wird durch die Umgebung, deren Druck immer derselbe ist und grösser als der des gesättigten Dampfes, constant gehalten. Der gesättigte Dampf wird zu seiner Flüssigkeit verdichtet werden, es wäre denn, dass wir den Sauger festhielten. Die Haut der Flüssigkeit wird sich zusammenziehen, es sei denn, dass wir dieses verhinderten. Heben wir den Sauger, so haben wir eine Arbeit zu verrichten, entsprechend dem Producte der Druckdifferenz der Umgebung und des gesättigten Dampfes und der Volumenvergrösserung des cylinderförmigen Raumes; die Flüssigkeit wird zum Teil verdunsten auf Kosten von der Wärme der Umgebung; der Druck des gesättigten Dampfes wird mitwirken zur Volumenvergrösserung des Cylinders. So haben wir auch beim Ausrecken eines Häutchens eine Arbeit zu verrichten, entsprechend dem Producte der Druckdifferenz des gesättigten Dampfes und was wir in den verschiedenen Punkten der capillaren Schicht in der Richtung der Grenzschicht (d. h. in der Richtung der Ausreckung) als Druck in Rechnung bringen müssen und des Raumes in der Richtung des Ausreckens durchlaufen; das Fluidum wird zum Teile zu anderen Densitäten übergeben auf Kosten der Wärme der Umgebung. Was wir als Druck in der Richtung der capillaren Schicht

zu betrachten haben, wird zur Ausreckung mitwirken (dieser Druck kann natürlich auch negative Werte haben) gleichfalls auf Kosten der Wärme der Umgebung. *Wir haben in beiden Fällen eine bestimmte Quantität mechanischer Arbeit zu verrichten, welche für das Zustandekommen der Zustandsveränderungen unerlässlich ist. Durch Wärmezufuhr allein können wir diese Zustandsänderungen nicht zustande bringen.*

Die besondere Energie, welche wir durch Wärmezufuhr in diesem Falle nicht haben geben können, ist die Arbeit, welche wir beim Ausrecken des Häutchens verrichtet haben. *Diese Arbeit hat einen Wert, welcher vom Verlauf der Zustandsänderungen in der capillaren Schicht nicht abhängt. Es ist nun leicht ersichtlich, weshalb wir diese Energie durch Wärmezufuhr allein nicht geben können und dass diese Energie dem Betrag entsprechen muss, womit das thermodynamische Potential in der Uebergangsschicht*

$$s - \tau_1 \eta + p_1 v,$$

berechnet über eine Säule, mit einem Durchschnitt von 1 cm^2 und mit einer Höhe von der Dicke der capillaren Schicht, das thermodynamische Potential der gleich grossen homogenen Massen der Flüssigkeits- oder Dampfphase übertrifft.¹⁾

So hat also die Weise, in welcher wir den Moleculardruck definirt haben, uns in den Stand gesetzt, mit Hülfe der Zustandsgleichung von van der Waals zu zeigen:

a) dass wirklich eine Oberflächenspannung besteht,

b) dass die Grösse der Oberflächenspannung zu einem Wert für die capillare Energie führt, welcher vollkommen derselbe ist als der, welchen die thermodynamische Theorie dafür angiebt. Dieses gilt auch ausserhalb der Grenzen, welche wir uns gesetzt haben, wenn wir also die Ausdrücke

$$\int_0^\infty \psi(u) u^3 du, \quad \int_0^\infty \psi(u) u^4 du \text{ etc.}$$

nicht vernachlässigt hätten,

c) dass die Grösse der Oberflächenspannung nicht abhängt von den Zustandsänderungen, welche in der capillaren Schicht eintreten können, sodass bei isothermischen Verän-

1) H. Hulshof. Inaugural-Dissertation.

derungen der Oberfläche also die Beschwerden, welche von der Thermodynamik gegen die Oberflächenspannungstheorie gewöhnlich angeführt werden, verschwinden können.

Der Hauptinhalt des hier Mitgeteilten wurde schon namens des Verfassers von Prof. van der Waals für den Bericht der gewöhnlichen Versammlung der naturphilosophischen Abteilung der Koninkl. Akad. van Wetensch. zu Amsterdam am 29. Jan. 1900 angeboten und darin aufgenommen. Diese Erwähnung erachte ich hier für erwünscht, da eine geraume Zeit nachher Mitteilungen über diesen Gegenstand gemacht worden sind von einem Autor, der meine Mitteilung an die Koninkl. Akad. van Wetensch. nicht erwähnt hat.

Delft, October 1900.

(Eingegangen 30. October 1900.)

10. Ueber das numerische Verhältniß
der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien
nach der molecularen Theorie;
von W. Voigt.

1. Es ist bekannt, dass in Bezug auf das numerische Verhältniß der beiden Elasticitätsconstanten isotroper Medien die ältere Moleculartheorie der Elasticität in einen anscheinend unlösbaren Widerspruch mit der Erfahrung geriet, der ihre zeitweilige Verdrängung durch eine Theorie der „Nahwirkungen“ zur Folge hatte. Wenn nun auch diese letztere Theorie zu Formeln geführt hat, die sich nach jeder Richtung bewährt haben, so war es doch im Interesse der Ausarbeitung unserer molecularen Vorstellungen nötig, den Grund aufzusuchen, aus dem die ältere Theorie zu falschen Resultaten geführt hat.

Diese Untersuchung¹⁾ ergab in Bezug auf *krystallinische* Körper das durchaus plausible Resultat, dass es eine ungerechtfertigte Specialisirung der Moleculartheorie involvire, die Molecularkräfte als nur von der Entfernung abhängig anzunehmen, und dass jeder Widerspruch mit der Erfahrung verschwindet, wenn man die Wechselwirkungen zwischen zwei Moleculen in einer den Symmetrieverhältnissen des Krystalles entsprechenden Weise mit der Richtung variiren lässt.

Die Anwendung dieser erweiterten Vorstellung auf *isotrope* Medien ergibt dagegen kein anderes Resultat als die ältere Theorie, *solange man diese Körper wirklich molecular-isotrop*, d. h. ihre letzten Elementarteilchen in allen möglichen Orientirungen einander angelagert denkt.²⁾ Bei dieser Constitution berechnen sich nämlich die elastischen Druckkräfte ebenso, als wenn die Molecularkräfte nur Functionen der Entfernungen wären, und es resultirt jenes bekannte Formelsystem

$$(1) \quad \begin{cases} -X_x = c x_x + c_1 y_y + c_1 z_z, \dots \\ -Y_x = \frac{1}{2}(c - c_1) y_x, \dots \end{cases}$$

1) W. Voigt, Gött. Abhandl. 34. p. 1. 1887.

2) W. Voigt, l. c. p. 47; Wied. Ann 38. p. 573. 1881.

mit dem Verhältniß der beiden Elasticitätsconstanten $c = 3c_1$, welches durch die Beobachtung nicht bestätigt wird.

Die Schwierigkeit verschwindet, wenn man die betreffenden Körper als *aus Krystallfragmenten von allen möglichen Orientierungen aufgebaut*, sie, wie ich sage, als *quasi-isotrop* ansehen darf. Hier läßt sich im Idealfall völlig dichter Verwachsung der Krystallindividuen jede der beiden Elasticitätsconstanten des Körpers selbst, im gegenteiligen Falle mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wenigstens deren Verhältniß aus den Elasticitätsconstanten des homogenen Krystalles berechnen, und es ergibt sich das letztere von Substanz zu Substanz variirend, wie dies auch die Beobachtung zeigt.

Aber es ist doch unzweifelhaft, dass nicht alle isotropen Körper nur *quasi-isotrop* sind; ist bei *festen* Körpern der Aufbau aus Krystallelementen immerhin stets denkbar, so würde eine solche Auffassung der tropfbaren Flüssigkeiten auf anderen Gebieten, als dem der Elasticität, zu unlösbaren Widersprüchen führen — von den Gasen gar nicht zu reden. *Die Heranziehung der Quasüisotropie, die in äusserst vielen Fällen, insbesondere bei den dichten Gesteinen und den Metallen als gestattet, ja gefordert erscheint, beseitigt die Schwierigkeit der molecularen Elasticitätstheorie hiernach doch nicht allseitig.*

Ich werde im Folgenden zeigen, auf welche Weise der noch übrig gebliebene Rest von Schwierigkeit sich anscheinend erledigen lässt.

2. Wir gehen aus von den bekannten Definitionen der elastischen Druckcomponenten gegen ein Flächenelement ω innerhalb eines elastischen Körpers. Errichtet man über ω einen geraden Cylinder nach der Seite hin, nach welcher man seine Normale n als *positiv* rechnet, bezeichnet man ein im Innern des Cylinders liegendes Molecül mit i , ein jenseits der Ebene von ω liegendes mit a , die Componenten der Elementarwirkung von (a) auf (i) mit X_{ia} , Y_{ia} , Z_{ia} , dann sind die Componenten des Druckes gegen ω bez.

$$(2) \quad X_n = \frac{1}{\omega} \sum_{(i)} \sum_{(a)} X_{ia}, \quad Y_n = \frac{1}{\omega} \sum_{(i)} \sum_{(a)} Y_{ia}, \quad Z_n = \frac{1}{\omega} \sum_{(i)} \sum_{(a)} Z_{ia},$$

die Summen über alle Molecüle der Gattungen (i) und (a) erstreckt. Wegen der verschwindenden Wirkungsweite der

Molecularkräfte geben zu diesen Summen nur die ω unmittelbar anliegenden Molecüle merkliche Beiträge.

Bei Krystallen formt man diese Summen weiter um unter Benutzung der Annahme, dass ein jedes Molecül in *gleicher* Weise von anderen umgeben wäre. Eine solche Annahme ist bei isotropen Medien nicht zulässig; um die für die Isotropie charakteristische *mittlere* Gleichwertigkeit aller von einem Molecül ausgehenden Richtungen zu erhalten, müssen vielmehr die *einzelnen* Molecüle in *verschiedener* Weise umgeben sein; eine Anordnung, welche für *jedes einzelne Molecül* der Anforderung der Isotropie entspräche, existirt nicht.

Wenn nun aber auch im allgemeinen jedes Molecül dem anderen ungleichwertig ist, so fordert die Voraussetzung der Homogenität doch, dass in Bereichen, die erheblich kleiner sind, als die Sphäre merklicher molecularer Wirkung, die mittlere Verteilung der Molecüle die *gleiche* ist. So wollen wir annehmen, dass, wenn man den Raum zu beiden Seiten der Fläche ω in Schichten von einer sehr kleinen Dicke δ zerlegt, jede dieser Schichten über einer Grundfläche ω die gleiche Anzahl von Molecülen enthält.

Auf Grund dieser Festsetzung können wir dann folgendermaassen weitergehen. Die Doppelsummen in (2) lassen sich zusammenfassen zu einfachen Summen aller der Componenten, welche die Schichten innerhalb des Cylinders von den Schichten jenseits ω erfahren; da aber gleichwertige Schichtenpaare mit dem normalen Abstand n in der Zahl n/δ vorhanden sind, so lässt sich auch schreiben:

$$(3) \quad X_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n \Xi, \quad Y_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n H, \quad Z_n = -\frac{1}{\omega \delta} \sum n Z,$$

wobei Ξ, H, Z als die Gesamtcomponenten aufgefasst werden können, die eine der Fläche ω unmittelbar anliegende Schicht (J) von der einer negativen Coordinate n entsprechenden Schicht (A) erfährt.

Enthält die Volumeneinheit im Mittel ν Molecüle, so befinden sich deren $\nu' = \nu \omega \delta$ in der betrachteten Schicht (J). Setzen wir also $\Xi = \nu \omega \delta \cdot X, H = \nu \omega \delta \cdot Y, Z = \nu \omega \delta \cdot Z$, so sind X, Y, Z die Anteile, die von der Wirkung der Schicht

bei gleichmässiger Verteilung auf das einzelne Molecül entfallen.

Diese Componenten lassen sich folgendermaassen veranschaulichen. Man denke sich *eines* der Molecüle (i) in (J) mit dem System der Molecüle (a) in (A) in ihrer relativen Lage fest verbunden und verlege das Ganze derartig parallel mit sich, sodass das Molecül (i) in den Schwerpunkt von ω fällt; man erfülle dann die Schicht (A) in gleicher Weise, wie zuvor, mit Molecülen (a), verbinde sie mit einem zweiten Molecül in (J) und transportire das System ebenso wie das erste, und verfähre in derselben Weise mit sämtlichen Molecülen von (J).

So hat man jetzt im Schwerpunkt von ω eine Anzahl von ν' Molecülen und in einer Schicht im Abstand n eine Verteilung (A') von Molecülen in der ν' -fachen Dichte, wie zuvor. Die Componenten, die im Mittel *eines* der Molecüle (i) im Schwerpunkt von ω seitens dieses ganzen Systems (A') erfährt, sind mit Ξ , H , Z identisch; X , Y , Z sind somit die Componenten, die jenes Molecül von der Schicht (A') erfährt, *wenn man jedes dort befindliche Molecül durch seinen ν' ten Teil ersetzt*. Die so erhaltene Verteilung in (A') möge als die *mittlere* (a') bezeichnet werden.

Ersetzt man schliesslich Ξ , H , Z in (3) durch ihre Werte $\nu' X$, $\nu' Y$, $\nu' Z$, so resultirt

$$(4) \quad X_n = -\nu \sum n X, \quad Y_n = -\nu \sum n Y, \quad Z_n = -\nu \sum n Z,$$

und dabei sind die Summen zu nehmen über alle Wirkungen, die das mittlere Molecülsystem (a') auf der negativen Seite von ω ausübt auf das eine Molecül im Schwerpunkt von ω , welches wir weiterhin mit (o) bezeichnen.

Da wegen der Gleichheit von Actio und Reactio

$$X_n = -X_{-n}, \quad Y_n = -Y_{-n}, \quad Z_n = -Z_{-n}$$

ist, so sind die in (4) enthaltenen Summen denen gleich, die sich über den Halbraum auf der *positiven* Seite von ω erstrecken; hieraus folgt, dass man auch schreiben kann

$$(5) \quad X_n = -\frac{1}{2} \nu \sum n X, \quad Y_n = -\frac{1}{2} \nu \sum n Y, \quad Z_n = -\frac{1}{2} \nu \sum n Z,$$

wo sich nun die Summen auf die Wirkung der mittleren Verteilung in der *gesamten* Umgebung des betrachteten Molecüles (o) beziehen.

Da die mittlere Verteilung der Gleichwertigkeit aller Richtungen entsprechen soll, so werden bei ihr die Molecüle voraussichtlich Kugelflächen um das Molecül (o) als Centrum nahezu gleichförmig erfüllen. Dass hierbei eine etwaige Abhängigkeit der Elementarwirkung von der gegenseitigen Orientierung der Molecüle nicht zur Geltung kommen kann, ist schon oben gesagt; wir wollen von dergleichen hier überhaupt absehen.

3. Für das Weitere wollen wir die relativen Coordinaten der (mittleren) Molecüle (a'), über welche die Summe Σ erstreckt ist, gegen das betrachtete Molecül (o) durch x', y', z' , ihre relativen Verschiebungen mit u', v', w' bezeichnen, während x, y, z und u, v, w Coordinaten und Verschiebungen von (o) selbst bezeichnen. Man erhält dann die Druckcomponenten $X_x, \dots Z_z$ gegen die Coordinatenebenen, indem man n successive mit x', y', z' vertauscht.

Die Berechnung dieser Grössen geschieht nun bei der älteren, wie bei der neueren molecularen Theorie auf Grund der Beziehungen für die relativen Verschiebungen

$$(6) \quad \begin{cases} u' = \frac{\partial u}{\partial x} x' + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z', \\ v' = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial z} z', \\ w' = \frac{\partial w}{\partial x} x' + \frac{\partial w}{\partial y} y' + \frac{\partial w}{\partial z} z', \end{cases}$$

oder wegen der Wirkungslosigkeit einer reinen Drehung elastisch auch der damit äquivalenten

$$(7) \quad \begin{cases} u' = x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z', \\ v' = \frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z', \\ w' = \frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z', \end{cases}$$

wobei $x_x, \dots x_y$ die Deformationsgrössen bezeichnen.

Diese Formeln bilden auch die Grundlage der Nahewirkungstheorie der Elasticität. Aber während sie bei dieser

als Ausdruck der Stetigkeit der Verrückungen innerhalb des Körpers der dort benutzten dynamischen Auffassung der Materie durchaus entspricht, enthält sie bei der Moleculartheorie eine ganz wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, nämlich die Annahme, dass sich innerhalb des Bereiches der molecularen Wirkungssphäre die einzelnen Molecüle bei der Deformation des Körpers ebenso verhalten wie Punkte eines continuirlichen Mediums, das, neben gewissen Translationen und Drehungen als Ganzes, eine gleichförmige Dilatation nach drei zu einander normalen Richtungen erleidet.

Diese Annahme ist offenbar erfüllt bei einem Krystall, der bei der Deformation das Raumgitter seiner Molecüle dem Charakter nach nicht ändert; sie ist aber jedenfalls nicht selbstverständlich bei isotropen Medien.

Körper, in Bezug auf welche die Richtigkeit dieser Behauptung sofort einleuchtet, sind ideale Flüssigkeiten. Die unendlich leichte Verschiebbarkeit von deren Molecülen bringt nämlich nach jeder Deformation immer wieder eine Anordnung hervor, bei der die verschiedenen Richtungen unterschiedslos sind, wie sie dies ursprünglich waren.

Derartige Umlagerungen fallen aber nicht unter das Schema (7), und wir werden dasselbe demgemäss bei Annahme molecularer Constitution als charakteristisch für (ideale) fest-elastische Körper betrachten, Medien dagegen, deren Molecüle sich ihm nicht fügen, als mit einem gewissen Grad von Fluidität behaftet bezeichnen dürfen.

Für beliebige Körper der letzteren Art tritt an die Stelle von (7) eine allgemeinere Beziehung, die wir schreiben wollen:

$$(8) \quad \begin{cases} u' = x_x \xi_1 + y_y \xi_2 + z_z \xi_3 + y_z \xi_4 + z_x \xi_5 + x_y \xi_6, \\ v' = x_x \eta_1 + y_y \eta_2 + z_z \eta_3 + y_z \eta_4 + z_x \eta_5 + x_y \eta_6, \\ w' = x_x \zeta_1 + y_y \zeta_2 + z_z \zeta_3 + y_z \zeta_4 + z_x \zeta_5 + x_y \zeta_6; \end{cases}$$

hierin bezeichnen die ξ_h, η_h, ζ_h Functionen der Coordinaten x', y', z' , die im allgemeinen nicht angebar sind.

Im Falle einer Flüssigkeit werden die Verhältnisse sehr einfach. Damit nämlich die Unterschiedslosigkeit aller Richtungen von dem betrachteten Punkt (o) aus gewahrt bleibe, müssen sich alle die umgebenden Molecüle (α) der mittleren

Anordnung, auf die sich die Summen \mathcal{S} in (5) beziehen, in der Richtung des Radiusvectors r von (o) aus und zwar um mit r proportionale Strecken bewegen; auf diese Bewegungen haben die Winkeländerungen y_z, z_x, x_y , welche die Dichte ungeändert lassen, *keinen*, die Axendilatationen x_x, y_y, z_z aber *gleichen* Einfluss. Diese Verhältnisse drücken sich aus in dem Ansatz

$$(9) \quad u' = \frac{1}{3} x' \vartheta, \quad v' = \frac{1}{3} y' \vartheta, \quad w' = \frac{1}{3} z' \vartheta,$$

wobei

$$x_x + y_y + z_z = \vartheta$$

die räumliche Dilatation bezeichnet.

Entwickelt man mit diesen Werten die Ausdrücke für X_x, Y_x, Z_x weiter, so gelangt man successive zu folgenden Formeln. Es folgt zunächst unmittelbar aus (5):

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S}(x'_0 + u') \left(X_0 + \left(\frac{\partial X}{\partial x'} \right)_0 u' + \left(\frac{\partial X}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial X}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta), \\ Y_x &= -\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S}(x'_0 + u') \left(Y_0 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x'} \right)_0 u' + \left(\frac{\partial Y}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta), \\ Z_x &= -\frac{1}{2} \nu_0 \mathcal{S}(x'_0 + u') \left(Z_0 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x'} \right)_0 u' + \left(\frac{\partial Z}{\partial y'} \right)_0 v' \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Z}{\partial z'} \right)_0 w' \right) (1 - \vartheta); \end{aligned} \right.$$

hierin beziehen sich alle mit dem Index 0 versehenen Grössen auf den Zustand *vor* der Deformation; ν ist dabei gleich $\nu_0(1 - \vartheta)$ gesetzt. Soll der ursprüngliche Zustand, wie man das gewöhnlich annimmt, verschwindenden Drucken entsprechen, so sind alle Summen von der Form

$$\mathcal{S} x'_0 X_0, \mathcal{S} y'_0 X_0, \dots$$

gleich Null und wir haben einfacher, wenn wir uns auf Glieder erster Ordnung bezüglich der Deformationen beschränken und der Bequemlichkeit halber die oberen Indices ' an x, y, z fortlassen:

$$(11) \begin{cases} X_x = -\frac{1}{2} \nu_0 S \left[\left(X + x \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o u' + \left(x \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o v' + \left(x \frac{\partial X}{\partial z} \right)_o w' \right], \\ Y_x = -\frac{1}{2} \nu_0 S \left[\left(Y + x \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_o u' + \left(x \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_o v' + \left(x \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_o w' \right], \\ Z_x = -\frac{1}{2} \nu_0 S \left[\left(Z + x \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_o u' + \left(x \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_o v' + \left(x \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_o w' \right], \end{cases}$$

oder unter Benutzung von (9) wegen des Verschwindens von $S x_0 X_0, \dots$ auch:

$$(12) \begin{cases} X_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \vartheta S \left[\left(x^2 \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o + \left(xy \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o + \left(xz \frac{\partial X}{\partial z} \right)_o \right], \\ Y_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \vartheta S \left[\left(x^2 \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_o + \left(xy \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_o + \left(xz \frac{\partial Y}{\partial z} \right)_o \right], \\ Z_x = -\frac{1}{2} \nu_0 \vartheta S \left[\left(x^2 \frac{\partial Z}{\partial x} \right)_o + \left(xy \frac{\partial Z}{\partial y} \right)_o + \left(xz \frac{\partial Z}{\partial z} \right)_o \right]. \end{cases}$$

Nun sind

$$(13) \begin{cases} \frac{1}{2} \nu_0 S \left(x^2 \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o = \frac{1}{2} \nu_0 S \left(y^2 \frac{\partial Y}{\partial y} \right)_o = \dots = \gamma, \\ \frac{1}{2} \nu_0 S \left(xy \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o = \frac{1}{2} \nu_0 S \left(xy \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_o = \dots = \gamma_1 \end{cases}$$

jene dem Körper individuellen Parameter, die nach der älteren Theorie dessen Elasticitätsconstanten darstellen und durch die Beziehung

$$\gamma = 3 \gamma_1$$

verbunden sind, während alle Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{2} \nu_0 S \left(xy \frac{\partial X}{\partial x} \right)_o, \quad \frac{1}{2} \nu_0 S \left(x^2 \frac{\partial X}{\partial y} \right)_o, \quad \frac{1}{2} \nu_0 S \left(x^2 \frac{\partial Y}{\partial x} \right)_o, \dots$$

in denen einer der Buchstaben x, y, z nur *einmal* auftritt, nach Symmetrie verschwinden. Somit ergibt sich

$$(14) \begin{cases} X_x = Y_y = Z_z = -\frac{5}{3} \gamma_1 \vartheta, \\ Y_x = Z_y = Z_x = X_y = Y_z = X_z = 0; \end{cases}$$

dies sind aber die bekannten Ausdrücke für die Druckcomponenten innerhalb einer tropfbaren Flüssigkeit, welche die Nahewirkungstheorie aus dem allgemeinen Schema (1) durch die Beziehung $c = c_1 (= \frac{5}{3} \gamma_1)$ gewinnt, und die hier aus der molecularen Vorstellung abgeleitet sind.

Der eingeschlagene Weg ist mit leicht ersichtlichen Abweichungen auch auf Flüssigkeiten anwendbar, bei denen man

nicht von einem Anfangszustand mit verschwindenden inneren Drucken ausgehen kann, also insbesondere auf Gase. Das Eingehen auf sie mag aber unterbleiben.

4. Körper, welche den Formeln (9) entsprechen, wird man als *vollkommen elastisch-flüssig* den durch (7) charakterisirten *vollkommen elastisch-festen* gegenüberstellen. Zwischenstufen zwischen diesen beiden Extremen, also *Körper von unvollkommener Festheit* (welcher Name nicht den Doppelsinn von „Festigkeit“ besitzt), die den wirklichen Körpern wenigstens elastisch äquivalent sind, lassen sich dann jederzeit durch eine Combination der beiden charakteristischen Eigenschaften construiren. So wird man einen Körper, der den Beziehungen

$$(15) \quad \begin{cases} u' = \beta (x_x x' + \frac{1}{2} x_y y' + \frac{1}{2} x_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta x', \\ v' = \beta (\frac{1}{2} y_x x' + y_y y' + \frac{1}{2} y_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta y', \\ w' = \beta (\frac{1}{2} z_x x' + \frac{1}{2} z_y y' + z_z z') + \frac{1}{3} (1 - \beta) \vartheta z', \\ 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

entspricht, als im Verhältnis β fest-, im Verhältnis $(1 - \beta)$ flüssig-elastisch auffassen können. Der Ansatz entspricht der Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = \vartheta,$$

die offenbar auch bei Annahme der molecularen Constitution erfüllt sein muss.

Für einen solchen Körper folgt aus (11):

$$(16) \quad \begin{cases} -X_x = \gamma_1 ((3x_x + y_y + z_z)\beta + \frac{5}{3}\vartheta(1 - \beta)), \dots \\ -F_x = \gamma_1 \beta y_x, \dots \end{cases}$$

d. h., es ergibt sich das allgemeine Schema (1), in dem speciell

$$(17) \quad \begin{cases} c = \gamma_1 (3\beta + \frac{5}{3}(1 - \beta)) = \frac{1}{3}\gamma_1 (5 + 4\beta), \\ c_1 = \gamma_1 (\beta + \frac{5}{3}(1 - \beta)) = \frac{1}{3}\gamma_1 (5 - 2\beta) \end{cases}$$

ist. Zwischen den Constanten c und c_1 besteht jetzt kein constantes Zahlenverhältnis, sondern je nach dem Grad der Festheit kann c/c_1 alle Werte zwischen 1 und 3 erhalten. Die für die Festheit charakteristische Zahl β findet sich dabei zu

$$\beta = \frac{5(c - c_1)}{2(c + 2c_1)},$$

nahe parallel gehend dem Sir W. Thomson'schen modulus of rigidity

$$\frac{1}{2}(c - c_1) = \gamma_1 \beta.$$

Werte *ausserhalb* des Bereiches $1 < c/c_1 < 3$ sind durch teilweise Flüssigkeit der Substanz nicht erhältlich, was vollkommen einleuchtet. Die durch Wasser aufgeweichten Gelatinen und Leime geben sehr nahezu $c = c_1$, also den Grad der Festheit nahe gleich Null, was gleichfalls durchaus begreiflich ist.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

11. Ueber das elektrische Analogon des Zeeman-effectes; von W. Voigt.

Die überraschende und schöne Erklärung, welche Hr. Lorentz¹⁾ mit Hülfe seiner allgemeinen Theorie der Elektrodynamik von dem *directen* Zeeman'schen Phänomen gegeben hat, findet in meinen Untersuchungen²⁾ über den *inversen* Zeeman-effect eine Art von formaler und inhaltlicher Ergänzung. Während Hr. Lorentz, von einer ganz bestimmten Vorstellung über den Mechanismus des Vorganges ausgehend, fast ausschliesslich die Veränderung der *Emission* einer Lichtquelle durch die Einwirkung eines Magnetfeldes behandelt, beschäftigen sich meine Arbeiten unter alleiniger Heranziehung allgemeiner Ueberlegungen mit der *Absorption* und der *Doppelbrechung* in magnetisch beeinflussten Körpern. Durch den Kirchhoff'schen Satz steht ein Teil der auf dem einen und der auf dem anderen Wege erhaltenen Resultate in directer Beziehung, und die hierbei hervorgetretene Uebereinstimmung der beiderseitigen Ergebnisse miteinander, wie andererseits aller mit der Erfahrung, erweckt das Vertrauen, dass in jenen Ueberlegungen das Wesentliche des so merkwürdigen Vorganges richtig aufgefasst ist.

Bei dem nächst verwandten Problem der *elektrischen* Einwirkung auf Emission und Absorption fehlte bisher eine solche Zusammenwirkung der beiden Methoden. Es liegen hier nur erst die Formeln vor, welche von mir in erneuter Anwendung der in der Magnetoptik benutzten allgemeinen Principien ge-

1) P. Zeeman, Comm. from the Phys. Lab. Leiden, Nr. 33. p. 12. 1896.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 345. 1899; 68. p. 352. 1899; 69. p. 290. 1899; Ann. d. Phys. 1. p. 376 und p. 389. 1900.

wonnen sind¹⁾, und welche als bisher mit der Erfahrung im Einklang bezeichnet werden dürfen.

Freilich existiren in diesem Gebiete zur Zeit Beobachtungen nur allein über die elektrische Doppelbrechung fast durchsichtiger Körper im elektrischen Felde; die Prüfung konnte somit gerade auf die interessantesten Vorgänge, welche die Theorie in der Nähe scharfer Absorptionsstreifen fordert, nicht erstreckt werden. Von diesen wiederum zog besonders ein elektrisches Analogon des inversen Zeemaneffectes die Aufmerksamkeit auf sich, das sich in den beiden Hauptfällen kurz so darstellt.²⁾

Ein Körper mit feinen und hinreichend getrennten Absorptionsstreifen in seinem Spectrum zeigt für natürliches Licht, welches ihn *parallel* zu den Kraftlinien des Feldes (und zwar hier ohne Doppelbrechung) durchsetzt, *eine Verschiebung dieser Streifen ohne Zerlegung*, für Licht, welches ihn *normal* zu den Kraftlinien (und zwar mit Doppelbrechung) durchsetzt, *eine Verschiebung mit begleitender Zerlegung*.

Dabei nimmt im zweiten Falle die eine erzielte Componente des Streifens dieselbe Lage ein, wie im ersten der unzerlegt verschobenen Streifen. Für die Lage der anderen Componente giebt die allgemeinste Theorie keine Bestimmung; eine sehr plausible speciellere Fassung dagegen verlangt für dieselbe den *dreifachen* Betrag der Verschiebung der ersteren. Die Verschiebungen sind dem Quadrat der wirkenden Feldstärke proportional.

Mit den Grundlagen der Theorie zusammen konnte dieses Resultat als *sehr wahrscheinlich der Wirklichkeit entsprechend* bezeichnet werden, wenngleich bislang mehreren Forschern, die sich mit dem Aufsuchen einer Wirkung eines elektrischen Feldes auf die Linien eines Gasspectrums (also mit dem elektrischen Analogon zu dem *directen* Zeemaneffect) beschäftigt hatten, der Nachweis einer solchen nicht gelungen war.

Diese Wahrscheinlichkeit wird verstärkt durch den Umstand, dass die *Lorentz'sche elementare Theorie des directen*

1) W. Voigt, Wied. Ann. 69. p. 297. 1899.

2) W. Voigt, l. c. p. 312.

Zeemaneffectes in einer nahezu selbstverständlichen Ausgestaltung bezüglich des directen elektrooptischen Effectes zu genau denselben Resultaten führt, welche die von mir benutzte Behandlungsweise des inversen Phänomens bei Anwendung des Kirchhoff'schen Satzes liefert.

Den Nachweis hierfür zu erbringen und damit die Fruchtbarkeit der von Hrn. Lorentz vertretenen Theorie von einer neuen Seite zu zeigen, ist Hauptzweck dieser Notiz. Daneben wird eine Schätzung der Grössenordnung der durch die Theorie signalisirten Veränderungen der Spectral- bez. Absorptionslinien mitgeteilt werden, welche begreiflich macht, dass das überaus feine Phänomen der Beobachtung bisher verborgen geblieben ist.

1. Die Lorentz-Wiechert'sche Ionentheorie der Elektrizität betrachtet die in den leuchtenden Körpern schwingenden elektrischen Teilchen von der (scheinbaren) Masse m durch eine Art von elastischer Kraft an (in Wahrheit ihrerseits relativ langsam bewegte) Gleichgewichtslagen, etwa die ponderablen Moleküle M selbst, gebunden, und setzt für eines von ihnen die Bewegungsgleichungen im einfachsten Falle, dass die Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Elektronen vernachlässigt werden dürfen, folgendermaassen an:

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = -kz,$$

worin k eine positive Constante bezeichnet.

Es ist ohne weiteres klar, dass diese Formeln eine Einwirkung eines constanten elektrischen Feldes auf den Schwingungsvorgang und somit auf das optische Verhalten des Mediums *nicht* liefern; denn eine constante Kraft, neben der „elastischen“ in die Formeln eingeführt, ergiebt nichts anderes als eine Verschiebung der Ruhelage des Elektrons, ohne seine Periode zu ändern. Da aber doch elektrooptische Erscheinungen beobachtet worden sind, so wird man zu der Folgerung gedrängt, dass die Grundgleichungen (1) nicht die vollständigen sind, und demgemäss erweitert werden müssen.

In der That darf man es als selbstverständlich bezeichnen, dass das vorstehend angenommene Gesetz der wirkenden (elastischen) Kräfte $X = -kx$ etc. nur eine *erste Annäherung*

darstellt; denn für grössere Entfernungen muss die wirkende Kraft statt weiter zu wachsen, abnehmen und schliesslich verschwinden. Wir fassen demgemäss den gemachten Ansatz $X = -kx, \dots$ als das erste Glied einer Taylor'schen Reihe auf, die nach Potenzen der Coordinaten x, y, z fortschreitet und deren höhere Glieder bei der gewöhnlichen Betrachtung vernachlässigt werden dürfen, aber bei anderen Vorgängen gelegentlich Bedeutung erhalten.

Discutirt man diese höheren Glieder der bez. Ausdrücke für X, Y, Z , indem man (wenigstens im Mittel) das Kraftfeld als um das Molecül M von kugeligcr Symmetrie ansieht, so gelangt man zu dem Resultat, dass die Glieder zweiter Ordnung verschwinden und dass diejenigen dritter die bez. Factoren $r^2 x, r^2 y, r^2 z$, haben müssen, wobei

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

gesetzt ist. So gelangt man zu den erweiterten Ansätzen

$$(2) \quad X = -(k + k' r^2) x, \quad Y = -(k + k' r^2) y, \quad Z = -(k + k' r^2) z,$$

in denen k' eine Constante ist, welche nach dem Ausdruck

$$(3) \quad K = (k + k' r^2) r$$

für die resultirende Kraft sich anschaulich durch die Beziehung

$$(4) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^3 K}{\partial r^3} = k'$$

bestimmt.

Die Bewegungsgleichungen (1) erhalten hiernach die Gestalt:

$$(5) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(k + k' r^2) x, & m \frac{d^2 y}{dt^2} = -(k + k' r^2) y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = -(k + k' r^2) z. \end{cases}$$

Wir wollen nun annehmen, dass das betrachtete Ion ausser der Kraft K noch einer constanten elektrischen Feldstärke R , welche parallel zur Z -Axe wirkt, ausgesetzt sei, und dass dadurch seine Gleichgewichtslage um einen Betrag ζ_0 verschoben

werde, welcher gross ist gegen die Schwingungsamplituden und somit gegen die ausserhalb des elektrischen Feldes erreichten Werte x, y, z . Setzen wir dann

$$(6) \quad x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta_0 + \zeta$$

und beschränken uns in Bezug auf ξ, η, ζ auf die niedrigsten Glieder, so erhalten wir

$$(7) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -(k + k' \zeta_0^2) \xi, & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -(k + k' \zeta_0^2) \eta, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -eR - (k + k' \zeta_0^2) \zeta_0 - (k + 3k' \zeta_0^2) \zeta. \end{cases}$$

Da ζ_0 die neue Gleichgewichtslage des Ionen bestimmen soll, so ergibt sich dafür

$$(8) \quad \zeta_0 (k + k' \zeta_0^2) = -eR,$$

oder in erster Annäherung

$$(9) \quad \zeta_0 = -eR/k.$$

Diese Annäherung darf in die kleinen in k' multiplicirten Glieder der Gleichungen (7) eingeführt werden, wodurch letztere die Gestalt erhalten:

$$(10) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\left(k + \frac{k' e^2 R^2}{k^2}\right) \xi, & m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -\left(k + \frac{k' e^2 R^2}{k^2}\right) \eta, \\ m \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -\left(k + \frac{3k' e^2 R^2}{k^2}\right) \zeta. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass die drei Verrückungscomponenten nach den Coordinatenachsen, welche nach (1) ursprünglich dieselbe Periode τ besaßen, gegeben durch

$$(11) \quad \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{k}{m},$$

im elektrischen Feld die Perioden τ_1, τ_2, τ_3 annehmen, gegeben durch

$$(12) \quad \left(\frac{2\pi}{\tau_1}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau_2}\right)^2 = \frac{1}{m} \left(k + \frac{k' e^2 R^2}{k^2}\right), \quad \left(\frac{2\pi}{\tau_3}\right)^2 = \frac{1}{m} \left(k + \frac{3k' e^2 R^2}{k^2}\right).$$

Wegen der Kleinheit von k' folgt hieraus auch

$$(13) \quad \tau - \tau_1 = \tau - \tau_2 = \frac{k' e^2 R^2 \tau^2}{8 \pi^2 m k^2}, \quad \tau - \tau_3 = \frac{3k' e^2 R^2 \tau^2}{8 \pi^2 m k^2},$$

oder bei Einführung der den τ_h in Luft oder auch im Vacuum entsprechenden Wellenlängen $\lambda_h = \tau_h v$:

$$(14) \quad \lambda - \lambda_1 = \lambda - \lambda_2 = \frac{k' e^2 R^2 \lambda \tau^2}{8 \pi^2 m k^2}, \quad \lambda - \lambda_3 = \frac{3k' e^2 R^2 \lambda \tau^2}{8 \pi^2 m k^2}.$$

Berücksichtigt man, dass nach der Lorentz'schen Theorie sich in grösseren Entfernungen von dem leuchtenden Teilchen aus nur die Schwingungscomponenten normal zum Radiusvector als Lichtschwingungen geltend machen, so erkennt man, dass nach den vorstehenden Entwicklungen ein von Natur einfarbig mit der Periode τ leuchtender Körper im elektrischen Felde *parallel zu den Kraftlinien* wieder einfarbiges Licht, aber von etwa geänderter Periode τ_1 aussendet, dagegen *normal zu den Kraftlinien* zwei Farben, von denen die eine der Periode τ_1 , die zweite einer anderen Periode τ_3 entspricht. Dabei ist

$$(15) \quad \tau_3 - \tau = 3(\tau_1 - \tau), \quad \lambda_3 - \lambda = 3(\lambda_1 - \lambda).$$

Die Schwingungen, die sich *parallel* zu den Kraftlinien fortpflanzen, stellen *natürliches* Licht dar; von denen, die sich *normal* zu den Kraftlinien fortpflanzen, sind diejenigen mit der Periode τ_1 nach dem Meridian bez. Hauptschnitt, diejenigen mit der Periode τ_3 *normal* dazu *polarisirt*.

Diese Resultate entsprechen sämtlich genau dem, was die oben citirte Theorie des inversen Vorganges, und zwar bezüglich des numerischen Verhältnisses von $\tau_1 - \tau$ zu $\tau_3 - \tau$ dem, was die Theorie in der *speciellen* Fassung geliefert hat. Man wird hierin, wie schon eingangs ausgesprochen, ein neues Argument für die Wahrscheinlichkeit der früher signalisirten Resultate finden dürfen.

2. Der Umstand, dass die moleculare Theorie sich just mit der *specielleren* Fassung der von mir früher gegebenen übereinstimmend erweist, hat einen einfachen Grund, der ein gewisses Interesse verdient. In jener speciellen Fassung der Theorie wurden die Grundgleichungen mittels einer Erweiterung des gewöhnlichen Ausdruckes für die elektrische Energie

durch Hinzunahme von Gliedern mit höheren Potenzen der elektrischen Vectorcomponenten gewonnen.¹⁾ Dies hat die Folge, dass bei elektrostatischen Vorgängen an Stelle der Dielektricitätsconstanten D eine Function der Feldstärke R von der Gestalt $D_0 + D_1 R^2$ tritt, in der D_0 und D_1 Constanten bezeichnen. Die oben entwickelte Vorstellung führt aber, wie leicht erkennbar, zu dem analogen Resultate.

Denn bei, wie angenommen, sehr kleinem k ergibt die Formel (8) für die Verschiebung ζ_0 der Gleichgewichtslage eines Elektron in Folge des Feldes R , bei näherungsweise Auflösung,

$$(16) \quad \zeta_0 = -\frac{eR}{k} \left(1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3} \right).$$

Hieraus folgt für ein Medium mit nur einer Gattung von Elektronen bei Einführung von deren Anzahl α pro Volumeneinheit das spezifische elektrische Moment μ nach der Formel

$$(17) \quad \mu = -\alpha \zeta_0 e = +\frac{\alpha e^2 R}{k} \left(1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3} \right).$$

Die Elektrisirungszahl oder elektrische Suszeptibilität η ergibt sich hiernach zu

$$(18) \quad \eta = \frac{e^2 \alpha}{k} \left(1 - \frac{k' e^2 R^2}{k^3} \right);$$

die Dielektricitätsconstante D ist

$$(19) \quad D = 1 + 4\pi\eta = D_0 + D_1 R^2,$$

also in der That von der oben erwähnten Form, wobei gilt:

$$(20) \quad D_0 = 1 + \frac{4\pi e^2 \alpha}{k}, \quad D_1 = -(D_0 - 1) \frac{k' e^2}{k^3}.$$

Bei Einführung des Ausdruckes (11) für k hat man auch:

$$(21) \quad D_1 = \frac{dD}{dR^2} = -(D_0 - 1) \frac{k' e^2 r^2}{4\pi^2 m k^3}.$$

Bezeichnet man nun als *relative Zerlegung* ρ der für das Medium charakteristischen Spectrallinie den Ausdruck $(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda$,

1) W. Voigt, l. c. p. 184.

unter λ deren ursprüngliche Wellenlänge verstanden, so hat man nach (14):

$$(22) \quad \varrho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} = \frac{k' e^2 r^2}{4 \pi^2 m k^2} R^2,$$

also für die der Feldstärke Eins entsprechende Grösse ϱ_1 :

$$(23) \quad \varrho_1 = \frac{k' e^2 r^2}{4 \pi^2 m k^2}.$$

Vergleicht man dies Resultat mit der gefundenen Formel (21) so ergibt sich:

$$(24) \quad D_1 = \frac{dD}{dR^2} = -(D_0 - 1) \varrho_1,$$

was für das vorausgesetzte einfache Medium einen merkwürdigen Satz ausspricht.

Dem Ausdruck (20) für D_0 kann man unter Heranziehung des Wertes $\delta = \alpha M / \beta$ für die Dichte des Mediums (unter M die Masse des β Elektrons festhaltenden Molecules verstanden) und unter abermaliger Benutzung von (11) die Form geben

$$(25) \quad D_0 = 1 + \frac{e^2 r^2 \delta \beta}{\pi m M} = 1 + \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\beta m}{M} \cdot \frac{r^2 \delta}{\pi}.$$

Für Media mit mehreren Arten von Elektronen sind die entsprechenden Formeln minder einfach aber gleichfalls leicht aufstellbar.

3. Wir wenden uns nun zu einer Abschätzung der Grössenordnung des elektrischen Analogons des Zeemaneffectes. Hier bietet sich als nächstliegendes Hilfsmittel die Benutzung der Formel (24), die, wenngleich dergleichen Idealkörper mit nur einer Gattung Elektronen nicht existiren, doch zu einer Frage der blossen Grössenordnung jedenfalls herangezogen werden darf.

Aber so einfach der aus ihr folgende Wert der relativen Zerlegung

$$(26) \quad \varrho(=) \frac{D_1}{D_0 - 1} R^2$$

(wobei (=) die Gleichheit der Grössenordnung bezeichnet) auch ist, so giebt er uns wenig Aufklärung, weil die Grösse

$D_1 = dD/dR^2$ überhaupt und speciell für die hier in Frage kommenden Körper so gut wie unbekannt ist.

Wir müssen demgemäss zur Beantwortung der gestellten Frage auf das einzige gut beobachtete elektrooptische Phänomen, nämlich auf die *elektrische Doppelbrechung* zurückgreifen.

Aus den gelegentlich der Entwicklung der allgemeinen Theorie von mir mitgeteilten Formeln folgen für die complexen Brechungsindices v_h der beiden Wellen, die sich in dem elektrisirten Medium *normal* zu den Kraftlinien des Feldes fortpflanzen, die Ausdrücke

$$(27) \quad \begin{cases} v_1^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\Theta_h + R^2 \vartheta^2 \epsilon_h}, \\ v_2^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\Theta_h + R^2 \vartheta^2 \epsilon_h'}. \end{cases}$$

Hierin ist ϑ für $\tau / 2\pi$ gesetzt, Θ_h bedeutet $\vartheta^2 + i a_h \vartheta - o_h$, und ϵ_h, a_h, b_h sind Constanten des Körpers, die eine bestimmte Absorptionslinie (h) charakterisiren, ϵ_h, ϵ_h' messen speciell den ihr zukommenden elektrooptischen Effect. v_1 bezieht sich auf die nach den Kraftlinien, v_2 auf die normal dazu polarisirten Schwingungen. ϵ_h liefert die erwähnte specielle Theorie gleich $3\epsilon_h'$.

Ausserhalb des elektrischen Feldes liegt (kleines a_h vorausgesetzt) die Absorptionslinie (h) sehr nahe an der durch $\vartheta^2 = b_h$ gegebenen Stelle des Spectrums; innerhalb des Feldes dagegen für die beiden Wellen in den Stellen $\vartheta^2(1 + R^2 \epsilon_h') = b_h$ und $\vartheta^2(1 + R^2 \epsilon_h) = b_h$, d. h. an den Stellen für welche gilt:

$$(28) \quad \frac{2\pi}{\tau_1^2} = \frac{1}{b_h}(1 + R^2 \epsilon_h'), \quad \frac{2\pi}{\tau_2^2} = \frac{1}{b_h}(1 + R^2 \epsilon_h).$$

Vergleicht man diese Formeln mit (12) und zieht die Relation $\epsilon_h = 3\epsilon_h'$ heran, so erkennt man, dass ϵ_h' in der früheren Theorie dem Ausdruck $k'e^2/k^3$ in der neuen, molecularen Theorie entspricht.

Die Beobachtungen über elektrische Doppelbrechung sind an merklich *durchsichtigen* Körpern, d. h. für Farben, weitaus von Absorptionsstreifen vorgenommen, was sich dadurch ausdrückt, dass das in a_h multiplicirte Glied in dem Ausdruck für Θ_h vernachlässigt werden kann. Hierdurch werden v_1 und v_2

zu den *reellen* Brechungsindices n_1 und n_2 , für welche nunmehr gilt:

$$(29) \quad \begin{cases} n_1^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h + R^2 \vartheta^2 \epsilon_h}, \\ n_2^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h + R^2 \vartheta^2 \epsilon_h}. \end{cases}$$

Die Kleinheit des in R^2 multiplicirten Gliedes erlaubt die Entwicklung der Brüche, sodass resultirt:

$$(30) \quad n_1^2 = n_0^2 - \sum \frac{\epsilon_h \epsilon_h' \vartheta^4 R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2}, \quad n_2^2 = n_0^2 - \sum \frac{\epsilon_h \epsilon_h \vartheta^4 R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2},$$

wobei

$$n_0^2 = 1 + \sum \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h}$$

den Wert des quadrirten Brechungsindex ausserhalb des Feldes darstellt. Berücksichtigt man wieder die Relation $\epsilon_h = 3 \epsilon_h'$, so wird

$$(31) \quad n_1^2 - n_2^2 = 2 \sum \frac{\epsilon_h \epsilon_h' \vartheta^4 R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2}.$$

Um die Grössenordnung von ϵ_h' zu beurteilen, wollen wir annehmen, dass der untersuchte Körper nur *einen* Absorptionsstreifen besitze. In diesem Falle ist

$$(32) \quad n_0^2 = 1 + \frac{\epsilon_h \vartheta^2}{\vartheta^2 - b_h}, \text{ und } D = 1 + \epsilon_h$$

die gewöhnliche statische Dielektricitätsconstante.

Hier kann man dann schreiben

$$(33) \quad n_1^2 - n_2^2 = \frac{2 \epsilon_h \epsilon_h' \vartheta^4 R^2}{(\vartheta^2 - b_h)^2} = \frac{2 \epsilon_h' R^2}{\epsilon_h} (n_0^2 - 1)^2 = \frac{2 \epsilon_h' R^2 (n_0^2 - 1)^2}{D - 1}.$$

Messungen über elektrische Doppelbrechungen hat Hr. Quincke¹⁾ angestellt und die von ihm bestimmte Constante B entspricht, soweit ich sehe, dem Ausdruck $100 (n_1 - n_2) / R^2 = 100 (n_1^2 - n_2^2) / 2 n R^2$, unter n einen mittleren Wert des Brechungsindex, etwa n_0 verstanden; d. h. es würde sein

$$(34) \quad B = \frac{100 \epsilon_h' (n_0^2 - 1)^2}{n_0 (D - 1)},$$

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 739. 1883.

und man dürfte schreiben, indem man $n_0^2 - 1$ und $D - 1$ als von gleicher Grössenordnung betrachtet,

$$(35) \quad B(=) 100 e_h' (n_0^2 - 1),$$

wobei $(=)$ wieder die Gleichheit der Grössenordnung andeutet. Bei Rücksicht auf die Bedeutung von e_h' folgt dann auch

$$(36) \quad B(=) 100 k' e^2 (n_0^2 - 1) / k^3.$$

Erweitert man den rechts stehenden Ausdruck mit m und benutzt die Beziehung (11), welche $m/k = (\tau/2\pi)^2$ ergibt, so erhält man

$$(37) \quad \frac{B}{100(n_0^2 - 1)} (=) \frac{k' e^2 \tau^2}{4 \pi^2 m k^2}.$$

Die Combination dieses Resultates mit (22) giebt schliesslich sehr einfach

$$(38) \quad \varrho = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} (=) \frac{B R^2}{100(n_0^2 - 1)}.$$

Hr. Quincke findet bei Voraussetzung absoluter elektrostatischer Einheiten für Schwefelkohlenstoff B rund gleich $4 \cdot 10^{-5}$; bei Benutzung dieser Zahl würde somit

$$(39) \quad \varrho(=) \frac{4 \lambda R^2}{n_0^2 - 1} \cdot 10^{-7}$$

oder bei Einführung von Volt als Einheit, was durch die Vertauschung von R mit P ausgedrückt sein mag, auch

$$(40) \quad \varrho(=) \frac{4 \lambda P^2}{9(n_0^2 - 1)} \cdot 10^{-11}.$$

Unter Voraussetzung einer Feldstärke von 300 Volt pro Centimeter und eines bei Gasen angenähert vorhandenen Wertes von $\lambda/(n_0^2 - 1) = 10^{-1}$ würde hiernach

$$(41) \quad \varrho(=) 4 \cdot 10^{-8}$$

werden. Um die Grösse dieses Wertes besser zu übersehen, führen wir noch den Abstand d der Na-Linien D_1 und D_2 als von der Grössenordnung $\lambda \cdot 10^{-8}$ ein und erhalten dann

$$(42) \quad \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{d} (=) 4 \cdot 10^{-5}.$$

Das Resultat der vorstehenden Ueberlegungen geht also dahin, dass selbst unter der Annahme der grössten bekannten elektrischen Doppelbrechung neben sehr kleinem $(n_0^2 - 1)$ und

des in einem Dampf keineswegs leicht herstellbaren Potentialgefälles von 300 Volt pro Centimeter die in der Richtung normal zu den Kraftlinien des Feldes beobachteten Spectral- oder Absorptionslinien eines leuchtenden Dampfes nur etwa um den 20000^{sten} Teil des Abstandes der beiden *D*-Linien verbreitert werden würden. Hierdurch ist die Ergebnislosigkeit der bisherigen Versuche zur Auffindung eines elektrischen Analogons zum Zeemaneffect vollständig erklärt.

Göttingen, August 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

**12. Weiteres zur Aenderung der Schwingungsform
des Lichtes beim Fortschreiten in einem dis-
pergirenden und absorbirenden Mittel;
von W. Voigt.**

In einer früheren Notiz¹⁾ über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand habe ich mich mit der Untersuchung der Fortpflanzung ebener Wellen nicht rein periodischer Schwingungen in einem unendlichen absorbirenden und dispergirenden Medium einfachster Art beschäftigt und derselben die Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b \frac{\partial u}{\partial t}$$

zu Grunde gelegt, welche die elektromagnetische Lichttheorie für Körper ohne moleculare Eigenschwingungen liefert. Auf diese Gleichung habe ich ein von Riemann herrührendes Integrationsverfahren angewendet, das zwar auf den vorliegenden Fall der Erregung der Wellen durch die in vorgeschriebene Bewegung gesetzte Ebene ($z=0$) unmittelbar nicht passt, aber ihm durch einen von mir früher angegebenen Kunstgriff adaptirt werden kann.

Gerade bei der Anwendung dieses Verfahrens ist ein Fehler untergelaufen, der zwar die Sätze, um deren Nachweis es sich handelt, nicht berührt, aber doch Berichtigung verlangt.

Die Gleichung (1) ist durch die Substitutionen

$$(2) \quad u = U e^{-bt} \quad \text{und} \quad bt = \tau \sqrt{2}, \quad bz = \zeta a \sqrt{2}$$

auf die Form gebracht

$$(3) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2U,$$

und durch die weitere

$$(4) \quad \xi = \frac{\zeta - \tau}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\zeta + \tau}{\sqrt{2}}$$

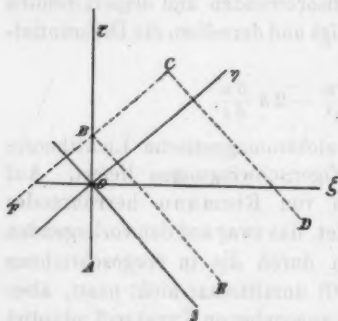
1) W. Voigt, Wied. Ann. 68. p. 598. 1899.

auf die Form

$$(5) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + U = 0.$$

Der Vorgang der Fortpflanzung einer in der Ebene $z=0$ erregten Bewegung spielt sich bei Einführung einer $\zeta\tau$ -Coordinatenebene auf der Halbebene $\zeta > 0$ ab; die letzte Substitution bezieht ihn auf ein $\xi\eta$ -Coordinatensystem, dessen ξ -Axe im vierten, dessen η -Axe im ersten Quadranten liegt. (Vgl. die Figur.)

Die Aufgabe, den Zustand in einer beliebigen Ebene z , infolge einer Bewegung der Ebene $z=0$, zu einer beliebigen



Zeit zu bestimmen, kommt darauf hinaus, U für eine beliebige Stelle C der $\zeta\tau$ -Ebene durch die längs der τ -Axe vorgeschriebenen Werte von U auszudrücken.

Die Anwendung des Riemann'schen Verfahrens liefert unmittelbar, falls A, B, C, D die in der Figur mit diesen Buchstaben versehenen Punkte bezeichnen (A und D , wie auch E und F in un-

endlicher Ferne gedacht), das früher in der Formel (10) enthaltene Resultat

$$(6) \quad U_C = U_B - \int_A^B \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{2}},$$

wobei φ eine Hilfsfunction ist, die folgenden Bedingungen zu genügen hat:

überall auf dem Gebiete $FBCDF$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \varphi = 0,$$

überall längs $FC\bar{D}$

$$(8) \quad \varphi = 1.$$

Zugleich ist nach (4)

$$(9) \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da längs AB mit U auch $\partial U / \partial \tau$, nicht aber $\partial U / \partial \zeta$ gegeben ist, so bestimmt die Formel (6), auch wenn φ den Bedingungen gemäss bestimmt gedacht ist, U_0 noch nicht durch lauter bekannte Grössen; es handelt sich daher um die Ableitung des Wertes von $\partial U / \partial \zeta$ für $\zeta = 0$.

Hierzu gewinnt man die nötige Bedingung, indem man die Stelle C nach B gerückt denkt; bezeichnet man die dieser speciellen Lage von C entsprechende Function φ mit φ_0 , so erhält man aus (6) die Beziehung:

$$(10) \quad 0 = \int_A^B \left(\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \eta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{2}}.$$

Diese Formel ist von mir zur Gewinnung des gesuchten $\partial U / \partial \zeta$ nach dem der Stelle B entsprechenden $\tau (= \tau_0)$ differentiirt worden; es ist aber dabei nicht beachtet, dass die Formel τ_0 ausser in der oberen Grenze auch in φ_0 enthält. Hr. H. Weber in Strassburg hat mich hierauf aufmerksam gemacht. Der Fehler ist dadurch entstanden, dass die Bedingungen für φ unabhängig von der Lage des Punktes C sind, φ selbst also auf *Coordinaten relativ zu C bezogen* immer das gleiche Gesetz befolgt; dies letztere ist mit einer Unabhängigkeit von der Lage von C verwechselt worden.

Bei Berücksichtigung dieser Abhängigkeit kann man nun in folgender Weise vorgehen. Setzt man für $\partial U / \partial \eta$ und $\partial \varphi_0 / \partial \xi$ ihre Werte gemäss (9) ein, so erhält man aus (10)

$$0 = \int_A^B \left(\varphi_0 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) - U \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} \right) \right) d\tau,$$

d. h.

$$(11) \quad 0 = \left[\varphi_0 U \right]_A^B + \int_A^B \left(\varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial \varphi_0}{\partial \zeta} \right) d\tau.$$

Den Verlauf der Function φ_0 innerhalb des Bereiches $FBEF$ kann man sich durch Discussion der Formeln (7) und (8) leicht klar machen. Als dritte Coordinate über der Ebene $\tau\zeta$ oder $\xi\eta$ aufgetragen ergibt φ_0 eine Sattelfläche, die symmetrisch zur $\tau\varphi$ -Ebene liegt und auf gleichseitigen Hyperbelen mit den Asymptoten BF und BE constante Höhe hat; $\tau = -\infty$ entspricht unendlichen Werten φ_0 .

Denkt man der Einfachheit halber u für $\tau = -\infty$ selbst gleich Null vorgeschrieben, so ergibt sich dort $U\varphi_0$, das nach (2) $= u\varphi_0^{+2t}\varphi_0$ ist, ganz ohne Discussion der (aus der Theorie der Bessel'schen Functionen sich ergebenden) Grössenordnung von φ_0 gleich Null, d. h. $(\varphi_0 U)_A = 0$. Aus der Symmetrie des Gesetzes für φ_0 in Bezug auf die τ -Axe folgt weiter $\partial\varphi_0/\partial\zeta = 0$ für $\zeta = 0$; und da endlich $(\varphi_0)_B = 1$ ist, so erhält man aus (11) sehr einfach

$$(12) \quad 0 = U_B + \int_A^B \varphi_0 \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\tau.$$

Dies ist die Gleichung, welche $\partial U/\partial\zeta$ mit dem gegebenen U_B verbindet. Sie gilt für jede Lage des Punktes B auf der τ -Axe und drückt U_B für diese Stelle aus durch alle Werte von $\partial U/\partial\zeta$ zwischen A und B . Eine allgemeine Methode, um die Berechnung von $\partial U/\partial\zeta$ aus gegebenem U_B wirklich auszuführen, existirt nicht; doch kann man sich davon, dass diese Grösse mittels der vorstehenden Gleichung wirklich durch U_B bestimmt ist, auf verschiedene Weise leicht überzeugen. Der Einfachheit halber wollen wir u für $z = 0$ und $t < 0$, d. h. für $\zeta = 0$ und $\tau < 0$ als *verschwindend* vorgeschrieben denken; dann können wir in dem Integral in (12) A mit dem Coordinatenanfang $\tau = 0$ zusammenfallen lassen.

Der eine Weg ist der, dass man die positive τ -Axe in unendlich kleine, etwa *gleiche* Abschnitte $\delta\tau$ zerlegt denkt, den Punkt B successive in alle so erhaltenen Teilpunkte legt und das zugehörige Integral in eine Summe über alle zwischen A und B liegenden Abschnitte verwandelt, was nach der durch die physikalische Bedeutung von U bez. $\partial U/\partial\zeta$ gewährleisteten Stetigkeit jederzeit angeht. Dann erhält man ein System Formeln von der Gestalt

$$(13) \begin{cases} 0 = U_1 + \varphi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_1 \delta \tau, \\ 0 = U_2 + \varphi_2 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_1 \delta \tau + \varphi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_2 \delta \tau, \\ 0 = U_3 + \varphi_3 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_1 \delta \tau + \varphi_2 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_2 \delta \tau + \varphi_1 \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} \right)_3 \delta \tau, \\ \dots \end{cases}$$

Hierin bezeichnen U_1, U_2, \dots und $(\partial U / \partial \zeta)_1, (\partial U / \partial \zeta)_2, \dots$ die gegebenen Werte von U_0 und die gesuchten von $\partial U / \partial \zeta$ für τ gleich $1. \delta \tau, 2. \delta \tau, 3. \delta \tau, \dots$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ sind die Werte von φ_0 auf dem 1., 2., 3. Element $\delta \tau$ von B ab, welche nach den Bedingungen (7) und (8) für φ von der Lage von B auf der τ -Axe unabhängig sind. Diese linearen Gleichungen bestimmen die $(\partial U / \partial \zeta)_h$ eindeutig.

Der andere Weg setzt voraus, dass sich die auf der τ -Axe liegenden Werte von $U, \partial U / \partial \zeta$ und φ_0 nach Potenzen von τ entwickeln lassen. Man kann dann setzen, indem man dem Punkte B den Wert $\tau = \tau_0$ zuordnet,

$$(14) \begin{cases} U_B = a_0 + a_1 \tau_0 + a_2 \tau_0^2 + a_3 \tau_0^3 + \dots \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} = b_0 + b_1 \tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots \\ \varphi_0 = c_0 + c_1 (\tau_0 - \tau) + c_2 (\tau_0 - \tau)^2 + c_3 (\tau_0 - \tau)^3 + \dots \end{cases}$$

worin die a_h und die c_h als gegeben anzusehen sind (a_0 ist nach Annahme speciell gleich Null). Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (12) ein und führt die Integration von 0 bis τ_0 aus, so erhält man eine nach Potenzen von τ_0 fortschreitende Reihe, die für jedes τ_0 verschwinden soll; durch Nullsetzen der Factoren der verschiedenen Potenzen von τ_0 erhält man die Bestimmung der gesuchten b_h und somit die von $\partial U / \partial \zeta$.

Für die Ableitung der Sätze, auf die es bei meiner Untersuchung wegen der davon gemachten Anwendung besonders ankam, ist die Kenntnis der Werte von $\partial U / \partial \zeta$ für $\zeta = 0$ nicht erforderlich; es genügt, dass dieselben durch das für $\zeta = 0$ gegebene U bestimmt sind. Die Gleichung (6) lässt sich bei ähnlicher Umformung, wie sie mit (10) vorgenommen ist, schreiben

$$(15) \quad U_C = \frac{1}{2} U_B - \frac{1}{2} \int_A^B \left(\varphi \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) d\tau$$

und man erkennt leicht, dass aus ihr wirklich die früher behaupteten Thatsachen folgen: der *Beginn* einer Bewegung der Ebene $z = 0$ pflanzt sich mit derselben Geschwindigkeit a fort, als wenn das Medium nicht absorbirte, b also gleich Null wäre; das *Ende* der Bewegung pflanzt sich gar nicht fort, insofern von der vorübergegangenen Erregung eine Nachwirkung bleibt, die erst nach unendlich langer Zeit verschwindet; die Schwingungsform ändert sich bei der Fortpflanzung.

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 13. November 1900.)

**13. Berechnung der Leitfähigkeit
durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule;
von J. Stark.**

1. *Einleitung.* — Eine kürzlich erschienene Abhandlung¹⁾ hat die Leitfähigkeit durchströmter Gase zum Gegenstand; sie soll ergänzt werden durch die vorliegende Mitteilung.

Das Auftreten innerer elektromotorischer Kräfte in einem durchströmten Gase gestattet im allgemeinen nicht, dessen Leitfähigkeit nach den üblichen Methoden zu ermitteln. Eine Ausnahme hiervon macht jedoch die ungeschichtete positive Lichtsäule von grösserer Länge. In ihr ist nämlich auf relativ grosse Strecken die transversale Leitfähigkeit und das Gefälle constant; hieraus ist zu schliessen, dass in ihr das durchströmte Gas in einem gleichmässigen Zustand sich befindet und keine inneren elektromotorischen Kräfte besitzt. Für eine längere ungeschichtete positive Säule lässt sich darum die spezifische Leitfähigkeit λ aus der Spannungsdifferenz e zweier Querschnitte, deren Abstand l und Querschnitt q und der Stromstärke i berechnen. Es ist $\lambda = i \cdot l / q \cdot e$.

In dem vorstehenden Sinne ist die Leitfähigkeit durchströmter Gase im Folgenden berechnet worden. Als experimentelles Material sind dieser Berechnung zu Grunde gelegt die Messungen von A. Herz²⁾ über den Potentialgradienten im positiven Teil der Glimmentladung. Unter Leitfähigkeit ist im Nachstehenden immer Leitfähigkeit in der ungeschichteten positiven Lichtsäule verstanden und zwar nur innerhalb des Druckgebietes von 1—7 mm.

Für den Leitungsstrom in Elektrolyten wird gesetzt $\lambda = Ne(u + v)$; N bedeutet die Anzahl der freien positiven oder negativen Ionen, u bez. v die Geschwindigkeit des positiven bez. negativen Ions unter der Kraft Eins, e die Ladung. u und v sind dabei als gleichförmige Geschwindigkeiten ge-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 3. p. 492. 1900.

2) A. Herz, Wied. Ann. 54. p. 254. 1895.

dacht. Auch wenn man Beschleunigung¹⁾ der Ionen in Gasen zulässt, kann man, zwar nicht allgemein, aber für die ungeschichtete positive Lichtsäule $\lambda = Ne(u + v)$ setzen; nur sind dann u und v als mittlere Geschwindigkeiten zu nehmen.

W. Hittorf²⁾ hat bereits auf Grund seiner Messungen die Meinung ausgesprochen, dass in der positiven Lichtsäule die Leitfähigkeit proportional mit der Stromstärke zunehme. E. Riecke³⁾ hat eine Tabelle über die Leitfähigkeit durchströmter Gase berechnet; es lag indes damals noch kein so reiches experimentelles Material vor, wie es in der vorliegenden Mitteilung verwertet ist.

2. *Variation der Stromstärke.* — Durch die wandernden negativen und positiven Teilchen wird ein Gas ionisirt. Aus diesem Grunde ist die Leitfähigkeit eines durchströmten Gases abhängig von der Stromdichte. Es ist zu vermuten, dass bei constantem Druck die Beweglichkeiten der Ionen innerhalb ziemlich weiter Grenzen so gut wie unabhängig sind von dem Dissociationsgrad; die Aenderung der Leitfähigkeit bei Variation der Stromdichte rührt dann davon her, dass die Zahl der freien Ionen oder mit anderen Worten der Dissociationsgrad sich ändert.

Die Stromdichte kann man zunächst dadurch ändern, dass man den Querschnitt constant hält und die Stromstärke variiert.

Wie von verschiedenen Seiten nachgewiesen ist, lässt sich das Gefälle in der positiven ungeschichteten Lichtsäule innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel darstellen $e = a - a_1 i$, wo a und a_1 Constante sind, i Milliampère; sind darum Druck und Querschnitt constant, so ist die Leitfähigkeit

$$\lambda \cdot 10^8 = \frac{i}{q(a - a_1 i)}$$

oder, wenn $(i/q) = j$ und $a_1 q = b$ gesetzt wird

$$\lambda \cdot 10^8 = \frac{j}{a - bj}.$$

b ist immer beträchtlich kleiner als a , besonders in weiten Röhren. Für kleine Stromdichten nimmt daher die Leitfähigkeit λ proportional der Stromdichte j bez. Stromstärke zu; für grössere Stromdichten wächst λ schneller als j .

1) J. Stark, Physik. Zeitschr. 2. p. 132. 1900.

2) W. Hittorf, Wied. Ann. 20. p. 705. 1883.

3) E. Riecke, Wied. Ann. 63. p. 226. 1897.

Zum Belege des Vorstehenden möge die folgende Tab. I (nach Tab. III und IX von Herz) und die Fig. 1 dienen.

Tabelle I.

Stickstoff.		Wasserstoff.	
Druck 6,3 mm,		Druck 6,84 mm,	
Querschnitt 1,766 cm ² .		Querschnitt 1,766 cm ² .	
Stromdichte Milliamp.	Leitfähigkeit $\lambda \cdot 10^6$	Stromdichte Milliamp.	Leitfähigkeit $\lambda \cdot 10^6$
0,453	3,29	0,364	3,47
0,566	4,17	0,459	4,42
0,678	5,08	0,665	6,52
0,793	6,03	0,815	8,06
0,906	6,99	0,890	8,86
1,019	7,98	1,055	10,60
1,132	9,02	1,165	11,80
1,359	11,00	1,320	13,80

$$\lambda \cdot 10^6 = \frac{j}{145,5 - 17,66 \cdot j}$$

$$\lambda \cdot 10^6 = \frac{j}{108,1 - 8,83 \cdot j}$$

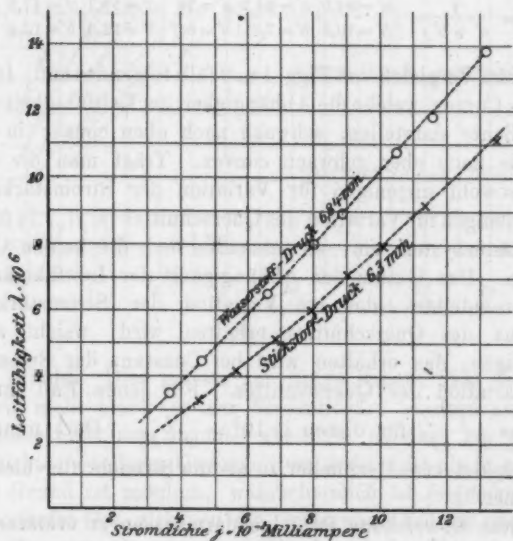


Fig. 1.

3. *Variation des Querschnittes.* — Die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte zeigt sich auch für den Fall, dass die Grösse des Querschnittes variiert wird, während die Stromstärke constant bleibt. Auch in diesem Fall nimmt die Leitfähigkeit mit wachsender Stromdichte zu. Dies zeigt die nachstehende Tabelle (nach Tab. IV von Herz) und Fig. 2.

Tabelle II.

Stickstoff, Stromstärke 1,2 Milliamp.

Quer- schnitt	Strom- dichte	Druck					
		4,32	3,87	3,39	2,54	2,03	1,42
		Leitfähigkeit $\lambda \cdot 10^6$					
5,00	0,246	—	—	—	3,92	4,89	6,64
3,14	0,382	4,02	4,38	4,86	6,03	7,32	9,78
1,766	0,679	6,90	7,51	8,19	9,97	12,2	16,0
0,788	1,528	14,3	15,9	17,7	—	—	—
$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a' + b'j}$		$a' = 91,0$ $b' = 10,3$	$a' = 84,3$ $b' = 7,8$	$a' = 76$ $b' = 6,7$	$a' = 59,7$ $b' = 12,3$	$a' = 47,3$ $b' = 12,4$	$a' = 34,0$ $b' = 12,5$

Beim Vergleich von Figg. 1 u. 2 fällt folgendes auf. In Fig. 1 sind die Curven, welche die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte darstellen, schwach nach oben concav; in Fig. 2 sind sie nach oben schwach convex. Trägt man die Curven (λ, j) , sowohl diejenigen für Variation der Stromstärke (λ, j) , wie diejenigen für Variation des Querschnittes (λ, j) , in dasselbe Coordinatensystem ein, so schneiden sich die beiden Curvensysteme. Das Gesetz der Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Stromdichte, das bei Variation der Stromstärke und Constanz des Querschnittes erhalten wird, weicht ab von demjenigen, das erhalten wird bei Constanz der Stromstärke und Variation des Querschnittes. Für jenen Fall lautet es $\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - bj}$, für diesen $\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a' + b'j}$. Dort nimmt die Leitfähigkeit etwas schneller zu als die Stromdichte, hier etwas langsamer.

Diese Abweichung ist folgendermaassen zu erklären. Bei den hier mitgetheilten Berechnungen wurde als Querschnitt des

Stromes derjenige der Entladeröhre gesetzt. Dies ist wohl nur angenähert richtig. Aber davon abgesehen, müssen wir die schwach convexe Form der Curven in Fig. 2 aus zwei Gründen erwarten.

Einmal ist möglich, dass von einem Stromfaden eine Wirkung ausgeht, welche die Leitfähigkeit in benachbarten

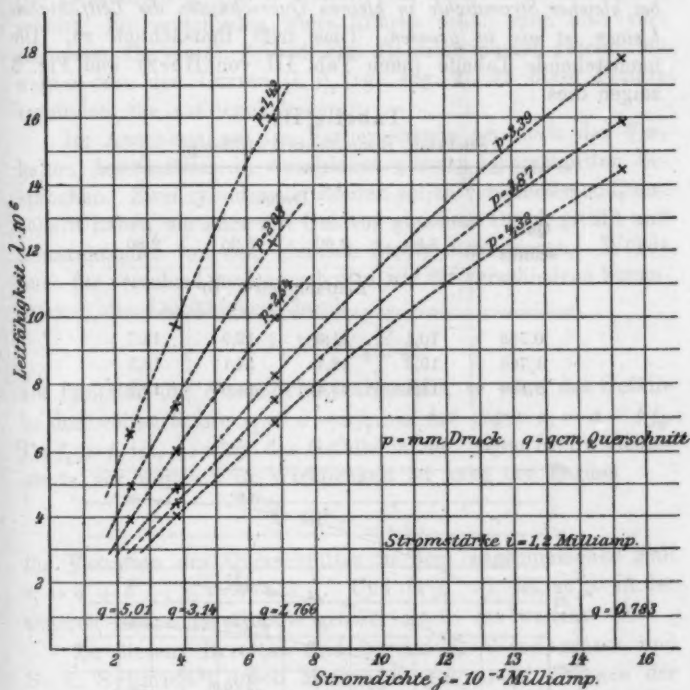


Fig. 2.

Fäden erhöht. Dies müsste zur Folge haben, dass die Leitfähigkeit nicht bloss von der Stromdichte, sondern auch von dem Querschnitt des Stromes abhängt, nämlich bei gleicher Stromdichte in weiteren Querschnitten grösser ist als in engeren. Dieser Grund ist möglich, wahrscheinlich ist folgender. Ein durchströmtes Gas giebt an die Gefässwand Wärme oder kinetische Energie ab; insofern die kinetische Energie seiner

Teilchen zu seiner Leitfähigkeit beiträgt, nimmt durch jene Abgabe an die Gefässwand die Leitfähigkeit ab. Diese Abnahme ist um so grösser, je grösser das Verhältnis von Umfang des Querschnittes zu dessen Fläche ist; die Erniedrigung der Leitfähigkeit durch die Gefässwand ist darum in engen Röhren grösser als in weiten. Wir müssen deshalb erwarten, dass bei gleicher Stromdichte in kleinen Querschnitten die Leitfähigkeit kleiner ist als in grossen. Dies trifft thatsächlich zu. Die nachstehende Tabelle (nach Tab. III von Herz) und Fig. 3 zeigen dies.

Tabelle III.

Stickstoff, Stromdichte 1 Milliamp.

Quer- schnitt	Druck			
	3,90	3,60	3,25	2,80
	Leitfähigkeit $\lambda \cdot 10^6$			
0,783	10,1	11,6	12,9	14,7
1,766	10,6	12,7	14,1	16,5
3,140	11,3	13,4	14,6	17,2

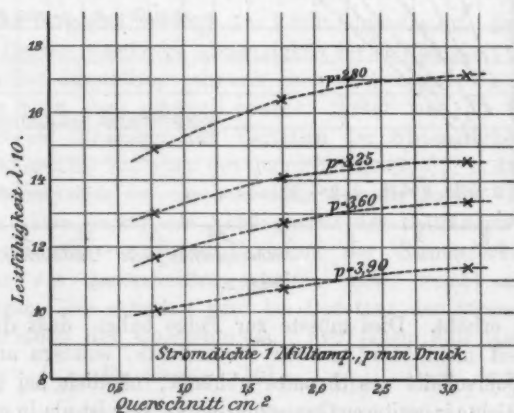


Fig. 3.

Aus diesem Resultat ist folgendes zu schliessen. Wegen des angedeuteten Einflusses darf das Gesetz der Abhängigkeit

der Leitfähigkeit von der Stromdichte nicht abgeleitet werden durch Variation des Querschnittes, sondern muss ermittelt werden durch Variation der Stromstärke bei constantem Querschnitt; es hat demgemäss die Form

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - bj}.$$

Die Constanten a und b ändern sich etwas mit dem Querschnitt; für verschieden weite Röhren erhält man also verschiedene Curven (λ, j) , (vgl. Fig. 1); diese müssen geschnitten werden von den Curven $(\lambda, j)_e$ (vgl. Fig. 2), da diese Punkte verbinden, die auf jenen liegen.¹⁾

Im Anschluss an das Vorhergehende sei noch das Verhalten des Gefälles in verschieden grossen Querschnitten besprochen. Zwei cylindrische Röhren sollen verschiedenen Querschnitt haben, sie seien mit Gas von gleichem Druck gefüllt und hintereinander von dem gleichen Strom durchflossen. Würde auch für verschiedene Querschnitte wie für verschiedene Stromstärken die Leitfähigkeit durch

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a - bj}$$

als Function der Stromdichte dargestellt, so wäre das Gefälle in der weiten Röhre $e_1 = a - bj_1$, in der engen $e_2 = a - bj_2$. Da $j_2 > j_1$ ist, so wäre das Gefälle in der engen Röhre kleiner als in der weiten. In Wirklichkeit ist nach der Formel

$$\lambda \cdot 10^3 = \frac{j}{a' + b'j}$$

für Variation des Querschnittes in dem angenommenen Fall $e_1 = a' + b'j_1$; $e_2 = a' + b'j_2$. Und da $j_2 > j_1$ ist, so ist in der engeren Röhre das Gefälle grösser als in der weiten.

Zu diesem Resultat sind bereits E. Wiedemann und G. C. Schmidt²⁾ durch Messungen gekommen. Wegen der Kleinheit von $b'j$ kann der Unterschied der Werte des Gefälles in zwei verschieden weiten Röhren nicht gross sein. Nach E. Wiedemann und G. C. Schmidt ist das Gefälle in einem Capillarrohr von 1 mm³ Querschnitt nur 2—3 mal grösser als in einem Rohre von 1800 grösserem Querschnitt.

1) Diese Ueberlegung verdanke ich Hrn. Geheimrat E. Riecke.

2) E. Wiedemann und G. C. Schmidt, Wied. Ann. 66. p. 323 bis 324. 1898.

Die Erhöhung des Gefälles in engen Canälen oder Poren hat wohl auch in den Versuchen Goldstein's¹⁾ statt, in denen in die Entladebahn eine Scheibe mit Poren eingeschaltet ist. Das Auftreten der Kathoden- und Canalstrahlen an den Poren ist auf das hohe Gefälle in diesen und auf den starken Abfall des Gefälles an den Porenöffnungen gegen den weiten Querschnitt zurückzuführen.

4. *Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Druck.* — Wir dürfen als sicher annehmen, dass mit abnehmender Dichte eines Gases die Beweglichkeiten der Ionen in ihm zunehmen. Ausserdem mag bei gleicher Stromdichte die Zahl der freien positiven und negativen Ionen in der Volumeneinheit bei kleiner Dichte grösser sein als bei höherer. Wir dürfen darum erwarten, dass mit abnehmendem Druck eines Gases seine Leitfähigkeit wächst.

Die Messungen zeigen nun, dass die *Leitfähigkeit eines durchströmten Gases mit abnehmendem Druck stark zunimmt*. Dies ist aus der nachstehenden Tabelle (nach Tab. IV und XIII von Herz) und Fig. 4 zu ersehen.

Tabelle IV.

Stickstoff.				Wasserstoff.	
Querschnitt	0,783	1,766	3,14	Querschnitt	1,766
Stromdichte	1,528	0,679	0,382	Stromdichte	0,565
Druck	Leitfähigkeit 10^6			Druck	Leitf. 10^6
7,99	—	4,33	—	8	4,33
7,00	10,5	4,88	—	7	5,38
6,07	11,5	5,46	—	6	6,14
4,96	12,5	6,84	—	5	7,11
4,32	14,3	6,90	4,02	4	8,76
3,87	15,9	7,51	4,88		
3,39	17,7	8,19	4,86		
2,98	19,8	9,01	5,43		
2,54	—	9,97	6,03		
2,08	—	12,2	7,32		
1,42	—	16,0	9,78		
0,94	—	—	18,40		

1) E. Goldstein, Wied. Ann. 11. p. 838. 1880.

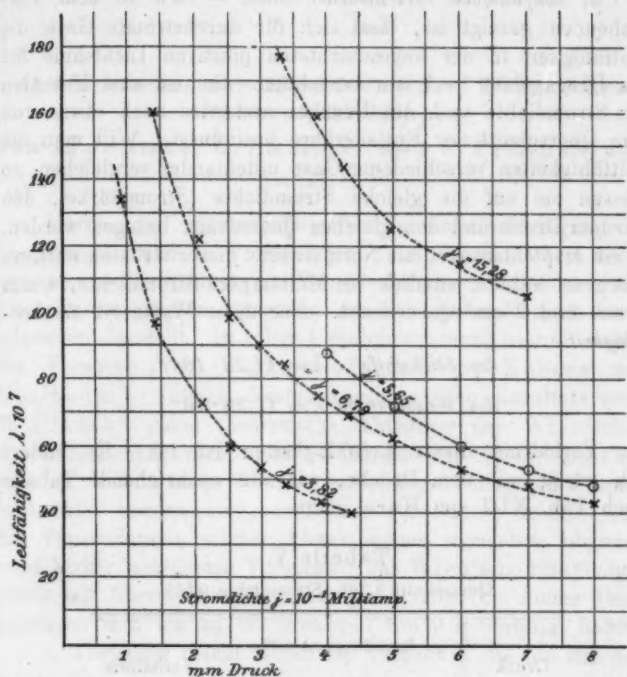


Fig. 4.

In der Formel

$$\lambda = \frac{j}{a - bj},$$

welche die Leitfähigkeit als Function der Stromstärke darstellt, sind die Grössen a und b als Functionen des Druckes p zu betrachten. Nach den von Herz gegebenen Zahlen kann mit grosser Annäherung

$$a = \alpha p, \quad b = \beta - \frac{\gamma}{p}$$

gesetzt werden. Wie man sieht, nimmt die Curve (p, λ) mit abnehmender Stromdichte mehr und mehr die Form einer gleichseitigen Hyperbel an.

5. *Leitfähigkeit verschiedener Gase.* — Wie in dem Vorstehenden gezeigt ist, lässt sich für durchströmte Gase die Leitfähigkeit in der ungeschichteten positiven Lichtsäule für das Druckgebiet 1—7 mm berechnen. Sie ist eine Function der Stromdichte und des Druckes und wird auch etwas von dem Querschnitt der Entladeröhre beeinflusst. Will man die Leitfähigkeiten verschiedener Gase miteinander vergleichen, so müssen sie auf die gleiche Stromdichte (Stromstärke), den gleichen Druck und den gleichen Querschnitt bezogen werden. Es ist empfehlenswert als Normalwerte dieser Grössen mittlere Werte zu wählen, nämlich ein Milliampère Stromdichte, 4 mm Druck und 2 cm² Querschnitt. Für diese Werte ist die *Leitfähigkeit*

$$\text{des Stickstoffs } \lambda = 11,28 \cdot 10^{-6},$$

$$\text{des Wasserstoffs } \lambda = 17,29 \cdot 10^{-6}.$$

Das Verhältniss dieser Leitfähigkeiten ist 1,5. Es ändert sich wenig mit dem Drucke, wie die nachstehende Tabelle (nach Tab. XIII von Herz) zeigt.

Tabelle V.

Querschnitt 1,766, Stromdichte 0,565.

Druck	Leitfähigkeit 10°		Verhältnis
	Wasserstoff	Stickstoff	
8	4,84	3,57	1,35
7	5,88	3,99	1,35
6	6,14	4,51	1,36
5	7,11	5,17	1,37
4	8,76	6,03	1,45

Göttingen, October 1900.

(Eingegangen 9. November 1900.)

14. *Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung;*
von E. Jahnke, O. Lummer und E. Pringsheim.

Durch die spectrobolometrischen Untersuchungen von O. Lummer und E. Pringsheim¹⁾ ist mit Sicherheit nachgewiesen worden, dass die Wien'sche Spectralgleichung die Energieverteilung im Spectrum des schwarzen Körpers nicht allgemein darstellt. In voller Uebereinstimmung hiermit stehen die Versuche von Beckmann²⁾ und von Rubens und Kurlbaum.³⁾ Infolge dieser experimentellen Resultate sieht M. Planck⁴⁾ seine theoretische Ableitung der Wien'schen Spectralgleichung nicht mehr als zwingend an, Wien selbst anerkennt, dass für lange Wellen Abweichungen von seinem Gesetze beobachtet worden sind, und auch Paschen⁵⁾ scheint jetzt das Vorhandensein solcher Abweichungen zuzugeben, obgleich seine bisher publicirten Versuche⁶⁾ das Wien'sche Strahlungsgesetz mit überraschender Genauigkeit selbst bei hohen Temperaturen und bis zu Wellenlängen von $9\ \mu$ bestätigt haben.

1. Trotzdem macht Wien den Versuch⁷⁾, die von ihm gegebene Herleitung seiner Spectralgleichung wenigstens teilweise aufrecht zu erhalten, da sie die schwarze Strahlung für kurze Wellen innerhalb der Beobachtungsfehler darstelle. Daher hält er es für wahrscheinlich, dass die von ihm gemachten

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 23—41 und p. 215—235. 1899; ferner 2. p. 163—180. 1900.

2) H. Beckmann, Inaugural-Dissertation, Tübingen 1898; vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576—588. 1899.

3) H. Rubens u. F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1900. p. 929—941.

4) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 202—204. 1900.

5) Vgl. Anm. 1 auf p. 202 der citirten Planck'schen Arbeit.

6) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 405—420 und p. 959—976. Vgl. auch F. Paschen und H. Wanner, l. c. p. 5—11. 1899.

7) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 530—539. 1900.

Hypothesen bei nicht allzu langen Wellen annähernd zutreffen; bei längeren Wellen würde man von anderen Hypothesen auszugehen haben. Dementsprechend seien verschiedene Strahlungsgesetze für lange und für kurze Wellen zu erwarten.

Eine solche Zweiteilung kann jedoch hier nicht in Betracht kommen. Denn die — von Wien allerdings nicht citirten — Versuche von Lummer und Pringsheim haben gezeigt, dass die Abweichungen nicht allein von der Wellenlänge, sondern auch von der Temperatur abhängen. Maassgebend für sie ist lediglich das Product λT . Das gleiche Resultat folgt auch aus dem Wien'schen Verschiebungsgesetz. Indem Wien sagt: „Wenn sich solche Abweichungen bei einer bestimmten Temperatur zeigen, so folgt aus meinem Verschiebungsgesetz, dass sie mit steigender Temperatur zu immer kleineren Wellenlängen vorrücken,“ entzieht er selbst dem Versuch, besondere Strahlungsgesetze für lange und für kurze Wellen als wahrscheinlich hinzustellen, den Boden.

2. Der erste, welcher mit Hülfe des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes und moleculartheoretischer Hypothesen eine Spectralgleichung abgeleitet hat, ist W. Michelson.¹⁾ W. Wien knüpft an die Michelson'schen Betrachtungen an und stellt sich die Aufgabe, mit Hülfe seines allgemein anerkannten Verschiebungsgesetzes²⁾ die Anzahl der von Michelson gebrauchten Hypothesen zu verringern.³⁾

Um die Michelson'sche Hypothese, dass auch bei einem festen Körper die Geschwindigkeiten der Molecüle nach dem Maxwell'schen Gesetze verteilt sind, zu vermeiden, benutzt Wien ein Gas als strahlenden Körper, dessen Strahlung er dadurch zur schwarzen macht, dass er es in einen Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden einschliesst. Bei der Berechnung der schwarzen Strahlung wird aber irrtümlich das im Hohlraum strahlende Gas wie ein *freistrahendes* behandelt, indem diejenigen Veränderungen vollkommen vernachlässigt

1) W. Michelson, Journ. Soc. Phys.-chim. russe 19. p. 79. 1887; Journ. de phys. (2) 6. p. 467—479. 1887; Phil. Mag. (5) 25. p. 425—435. 1888.

2) W. Wien, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1893. p. 55—62; Wied. Ann. 52. p. 132—165. 1894. Vgl. hierzu M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 67. 1900.

3) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662—669. 1896.

werden, welche die Strahlung dadurch erleidet, dass sie im Hohlraume eingeschlossen ist. Nur durch diese von dem Einflusse der Absorption und Reflexion herrührenden Veränderungen verwandelt sich jede beliebige Strahlung — hier die des Gases — in diejenige des schwarzen Körpers. Wenn man statt des strahlenden Gases irgend einen anderen Körper, z. B. ein glühendes Platinblech, in den spiegelnden Hohlraum einführen würde, so würde man durch die Wien'sche Schlussfolgerung dazu gelangen, die Strahlung des schwarzen Körpers auch mit der des freistrahenden Platins zu identificiren.

Bei der früheren Kritik¹⁾ dieses Verfahrens haben wir darauf hingewiesen, dass es bei der Gasstrahlung im spiegelnden Hohlraum unzulässig ist, die Strahlungsenergie E_λ der Anzahl der Molecüle proportional zu setzen, welche Strahlen der Wellenlänge λ aussenden. Auf diesen Einwurf antwortet Wien²⁾: „dass die Anzahl der Molecüle durch den zweiten Hauptsatz notwendig wird, weil die Irreversibilität und damit die Herstellung des Wärmegleichgewichtes nur erst durch das Zusammenwirken einer grossen Anzahl von Molecülen hervorgerufen wird. Bei einer geringen Anzahl würde sich überhaupt kein Gleichgewichtszustand der Strahlung herstellen.“

Diese Motivirung trifft jedoch nicht den erhobenen Einwand. Denn selbst wenn man zugiebt, dass die Anwendung des zweiten Hauptsatzes eine grosse Anzahl von Molecülen verlangt, so lässt sich damit doch unmöglich die der Kirchhoff'schen Hohlraumtheorie widersprechende Wien'sche Hypothese rechtfertigen, dass die Strahlungsenergie des Gases im spiegelnden Hohlraum *proportional der Anzahl der Molecüle* ist. Diese Annahme hat höchstens für ein freistrahendes Gas einen Sinn.

Die Uebertragung der Michelson'schen Hypothesen von einem festen Körper auf ein Gas muss daher als missglückt angesehen werden. Die weitere Wien'sche Herleitung kann somit höchstens unter der auch von Michelson gemachten Annahme aufrecht erhalten werden, dass das Maxwell'sche

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 1. p. 31. 1899.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 586. 1900.

Gesetz direct auf die Molecüle des *freistrahenden* schwarzen Körpers anwendbar ist.

3. Um dem unbekannten Einfluss Rechnung zu tragen, welchen die Strahlung eines jeden Molecüls durch die Gesamtheit der übrigen Molecüle und durch die Absorption im strahlenden Körper erfährt, setzt Michelson die Strahlungsenergie auch noch einer Function $f(T)$ proportional. Durch Einführung dieses aus kinetischen Vorstellungen nicht herleitbaren Factors verlässt Michelson den rein kinetischen Boden, auf dem seine übrigen Hypothesen stehen. Ausserdem ist die Michelson'sche Formel nicht eindeutig, sondern sie enthält noch unbestimmte Parameter. Es erschien daher als ein grosser Vorzug der Wien'schen Herleitung, dass sie ohne die genannte Hypothese zu einer eindeutigen Spectralgleichung zu gelangen schien.

Aber die Einfachheit der Wien'schen Herleitung ist nur eine scheinbare; denn auch Wien hat wie Michelson, ohne freilich darauf hinzuweisen, einen Factor $f(T)$ bei seiner Herleitung benutzt. Er hat nämlich stillschweigend im Maxwell'schen Ausdruck für die Anzahl der Molecüle gleicher Geschwindigkeit den Factor $T^{-3/2}$ weggelassen, oder was dasselbe ist, den bei richtiger Anwendung des Maxwell'schen Gesetzes sich ergebenden Ausdruck mit der Function $f(T) = T^{+3/2}$ multiplicirt. Hätte Wien diesen Factor beibehalten, so wäre er zu der unbrauchbaren Spectralgleichung

$$E = C(\lambda T)^{-3/2} \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}}$$

gelangt, nach welcher die Energie einer jeden Wellenlänge mit steigender Temperatur abnehmen würde. Diese von uns festgestellte Thatsache¹⁾ erkennt Wien vollkommen an, erklärt aber, dass er bei seiner Herleitung die Begründung für die Fortlassung des Factors $T^{-3/2}$ nicht gegeben habe, „weil dieselbe ausserordentlich einfach ist.“ Ausserdem betont er, dass das Fortlassen von $T^{-3/2}$ keine neue Hypothese involvire, vielmehr durch die thermodynamischen Gesetze gefordert werde.

Die Annahme, dass die Energie einer Wellenlänge mit steigender Temperatur nicht abnehmen darf, ist allerdings

1) O. Lummer u. E. Jahnke, Ann. d. Phys. 3. p. 286. 1900.

einfach. Aber diese Annahme genügt keineswegs, um das Fortlassen von $T^{-\mu}$ als „wohlbegründet“ erscheinen zu lassen.

Eine solche Begründung ist vielmehr unmöglich, da dieses Fortlassen nicht nur willkürlich ist, sondern mit der Einführung einer *weiteren, durch die Erfahrung widerlegten, Hypothese* gleichbedeutend ist. Der Bedingung, dass E mit wachsendem T nicht abnehme, wird schon genügt durch Einführung der *unbestimmten* Function $f(T)$. Diese führt aber zu folgendem Specialfall der Lummer-Jahnke'schen Gleichung

$$E = C T^{5-\mu} \lambda^{-\mu} e^{-\frac{c}{\lambda T}},$$

wo der unbestimmte Exponent μ jede positive Zahl gleich oder kleiner als 5 bedeutet. Will man zu einer *bestimmten* Spectralgleichung gelangen, so muss man mit Hülfe einer *neuen* Hypothese den Wert von μ specialisiren. So geht die allgemeine Formel für $\mu = 5$ in die Wien'sche über. Diese Specialisirung von μ ist identisch mit der Hypothese

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich.}$$

Gegen diese Hypothese aber spricht die Erfahrung, denn die Versuche von Rubens und Kurlbaum für lange Wellen zeigen, dass die von der Wien'schen Gleichung für jede Wellenlänge geforderte *endliche* Grenze der Strahlungsenergie:

$$\text{const.}/\lambda^5$$

schon bei mässigen Temperaturen überschritten wird.

Benutzt man statt dieser Hypothese die von der Erfahrung besser gestützte Beziehung

$$[\lim E = \text{const. } T]_{T=\infty},$$

so wird in der obigen Lummer-Jahnke'schen Gleichung $\mu = 4$, und man erhält aus ihr die Rayleigh'sche Formel¹⁾

$$E = C T \lambda^{-4} e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Da auch diese keine allgemeine Gültigkeit hat, so sieht man, dass der von Michelson eingeschlagene Weg überhaupt zu keiner allgemein gültigen Spectralgleichung führt.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 49. p. 539. 1900.

4. Gegenüber den Worten Wien's¹⁾: „Weshalb dadurch (es ist das Fortlassen von T^{-2} gemeint) der physikalische Sinn des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes verloren gehen soll, habe ich nicht verstehen können“, werde ausserdem darauf hingewiesen²⁾, eine wie untergeordnete Rolle bei der Wien'schen Herleitung die von ihm als erforderlich genannten Hypothesen spielen. Wien wäre zu seiner Spectralgleichung auch gelangt, wenn er einfach die Strahlungsenergie proportional dem Factor

$$e^{-\frac{\varphi(\lambda)}{T}}$$

gesetzt und zur Bestimmung der unbekannten Functionen das Stefan'sche Gesetz, das Wien'sche Verschiebungsgesetz und die Hypothese

$$\lim_{T=\infty} E = \text{endlich}$$

hinzugenommen hätte. Dieser Factor hat aber offenbar nur noch eine weitläufige Verwandtschaft mit dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz. Die Herleitung der Wien'schen Spectralgleichung entbehrt somit des theoretischen Charakters.

Wir fassen zum Schluss unsere Bemerkungen dahin zusammen, dass Wien's Erwiderung nicht geeignet ist, unsere Einwände zu entkräften, und dass die Wien'sche Herleitung auch nicht für das Gebiet der kurzen Wellen aufrecht erhalten werden kann. Aber auch wenn Wien's Spectralgleichung das wahre Gesetz der schwarzen Strahlung für alle Werte von λ und T darstellen würde, hätte man kein Recht, auf die Gültigkeit der zu Grunde gelegten Hypothesen zu schliessen, da diese nur eine untergeordnete Rolle bei der Herleitung spielen.

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 3. p. 537. 1900.

2) Vgl. O. Lummer u. E. Jahnke, l. c. p. 290 u. 296.

(Eingegangen 12. December 1900.)

15. *Zur Geschichte der Telegraphie;*
von L. Lewin.

Vor einiger Zeit fiel mir, bei toxicologischen Studien, in einem nicht häufig vorkommenden Werke: „De L'Ancre, L'incrédulité et mescreance du sortilege plainement convaincue, Paris 1622“ eine Notiz auf, die vielleicht verdient, weiteren Kreisen bekannt gemacht zu werden.

Unter den verschiedenen Arten der Weissagekunst, Zauberei und anderem abergläubischen Spuk führt der Verfasser auch die *Arithmantie* an, und, um zu erläutern was sie sei, erzählt er die folgende Begebenheit, die ich wörtlich anführen will:

„A l'Arithmantie se peut aussi raporter, ce grand et beau secret qu'un Allemand fit voir au roy Henry le Grand, qui est l'industrie et dexterité de faire parler et entendre les hommes absens pour esloignez qu'ils soient, et ce par le moyen de l'Aimant. Il frota premierement deux aiguilles d'Aimant, et puis les attacha separément en deux diuers horloges, autour desquels estoient escrites et grauées en rond les vingt et quatre lettres de l'Alphabet: Si bien que lors qu'on vouloit dire ou faire entendre ce qu'on desiroit: on remuoit et dressoit la pointe de l'esguille sur les lettres qui estoient necessaires pour composer et signifier tous les mots et parolles qu'il falloit: et à mesure qu'on tournoit et dressoit une esguille, celle de l'autre horloge pour si distant et separé qu'il fust, suiuiot entierement ce mesme mouuement. Le Roy voyant un si beau secret luy deffendit de le diuulguer, comme pouvant porter des tres-dangereux aduertissemens és armées et villes assiegées. Outre que Mardobée qui traicte de la nature de l'Aimant en reprouue et prohibe la communication.“

Es ist von dem in Mystik, Aberglauben und in Hass gegen die Vernunft befangenen Verfasser des Buches nicht zu verlangen, dass er jene Einrichtung eines Zeigertelegraphen genauer kannte. So viel scheint immerhin aus dieser Mitteilung

hervorzugehen, dass durch diese deutsche Erfindung schon vor ca. 300 Jahren eine Verständigung in der Schriftsprache auf grössere Entfernungen hin mittels magnetischer Kräfte ermöglicht wurde. Besonders interessant ist es, dass gerade die praktische Nutzenanwendung dieser Erfindung für Kriegszwecke in den Vordergrund gestellt wird, und es wäre wichtig festzustellen, ob der König Heinrich IV. oder andere später von dieser Erfindung Gebrauch gemacht haben.

(Eingegangen 30. October 1900.)

1.



2.



3.



4.



5.



6.



7.



8.



9.



10.



11.

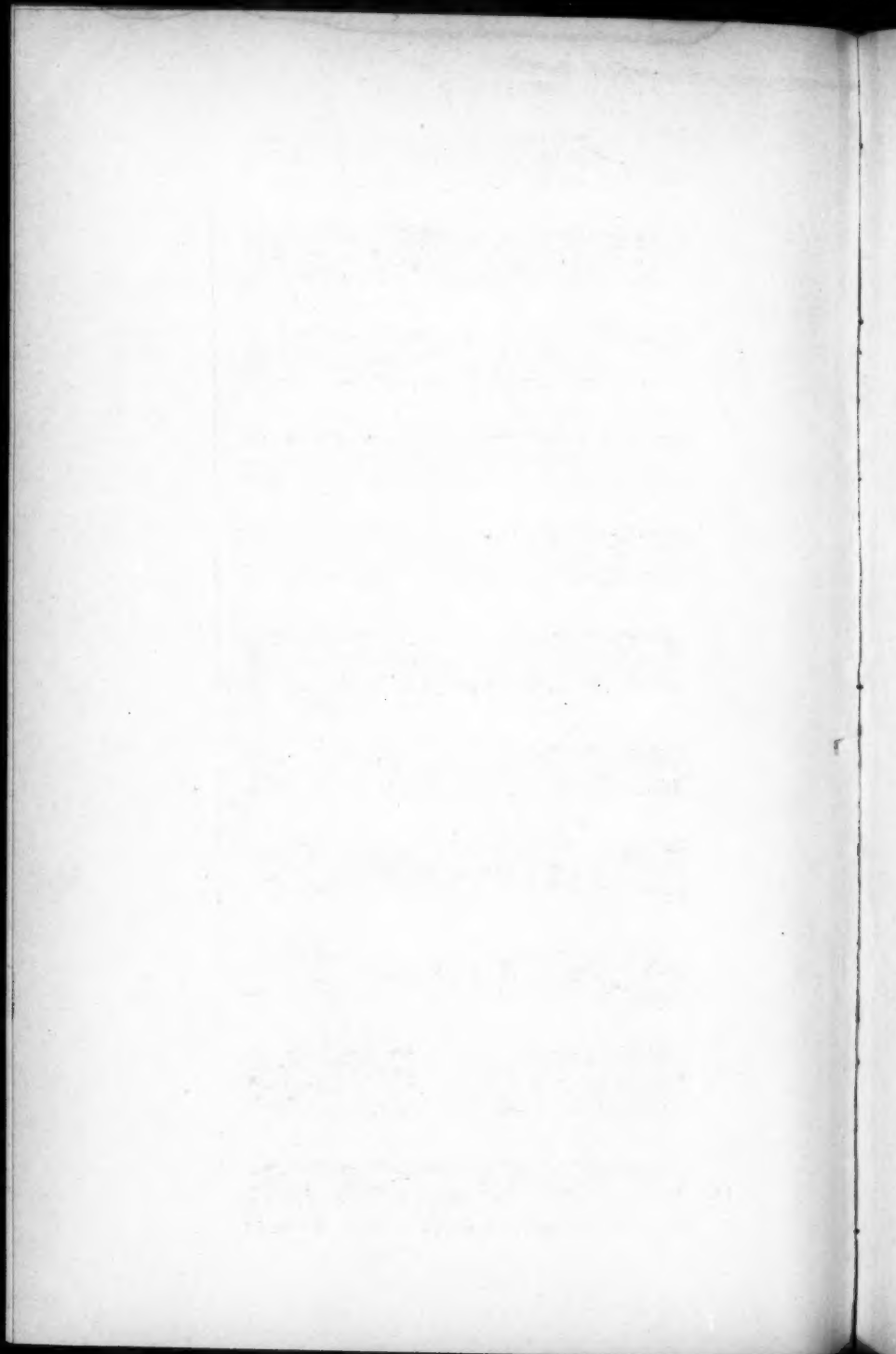


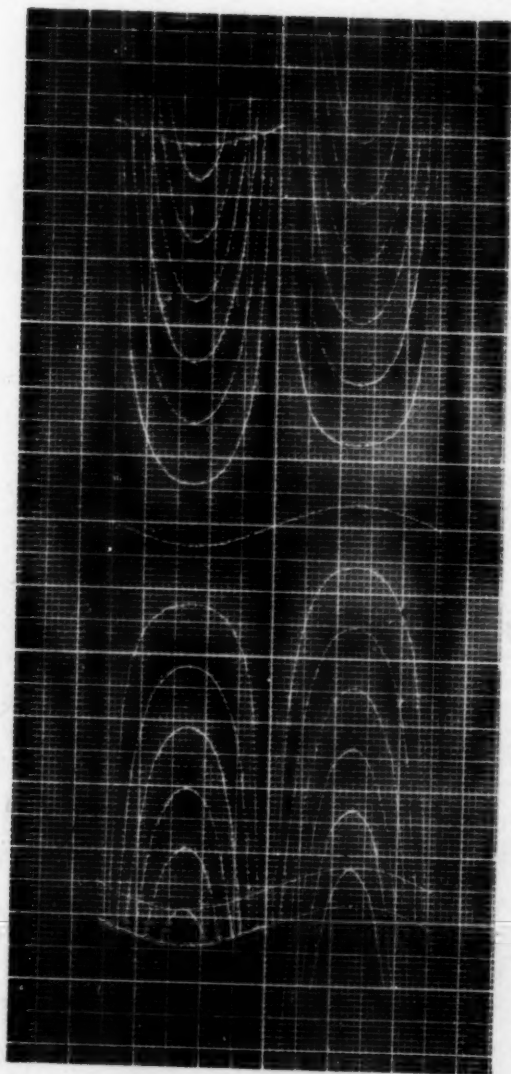
Aufnahmen
im
Schwingungs-
bauch.

Desgl. mit
Viertel-
Undulations-
Platte.

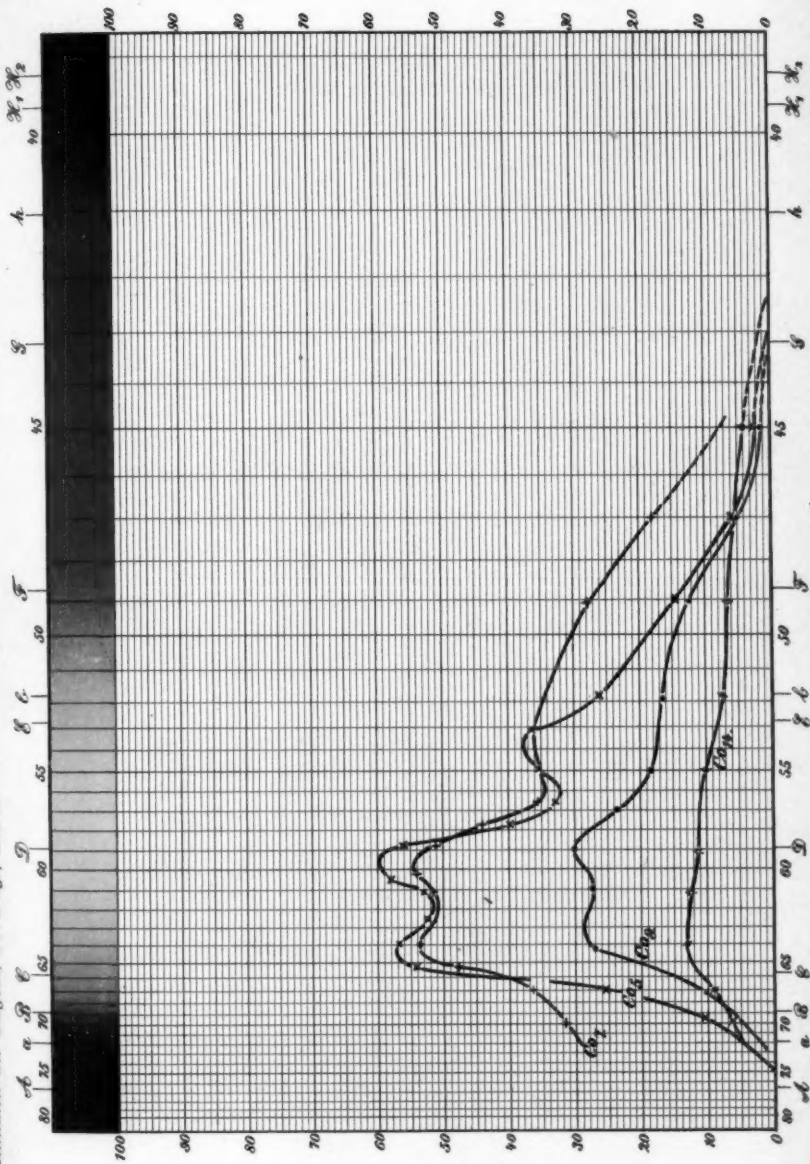
Aufnahmen
im
Schwingungs-
knoten.

Gleichzeitige
Aufnahmen
im Bauch
und Knoten.

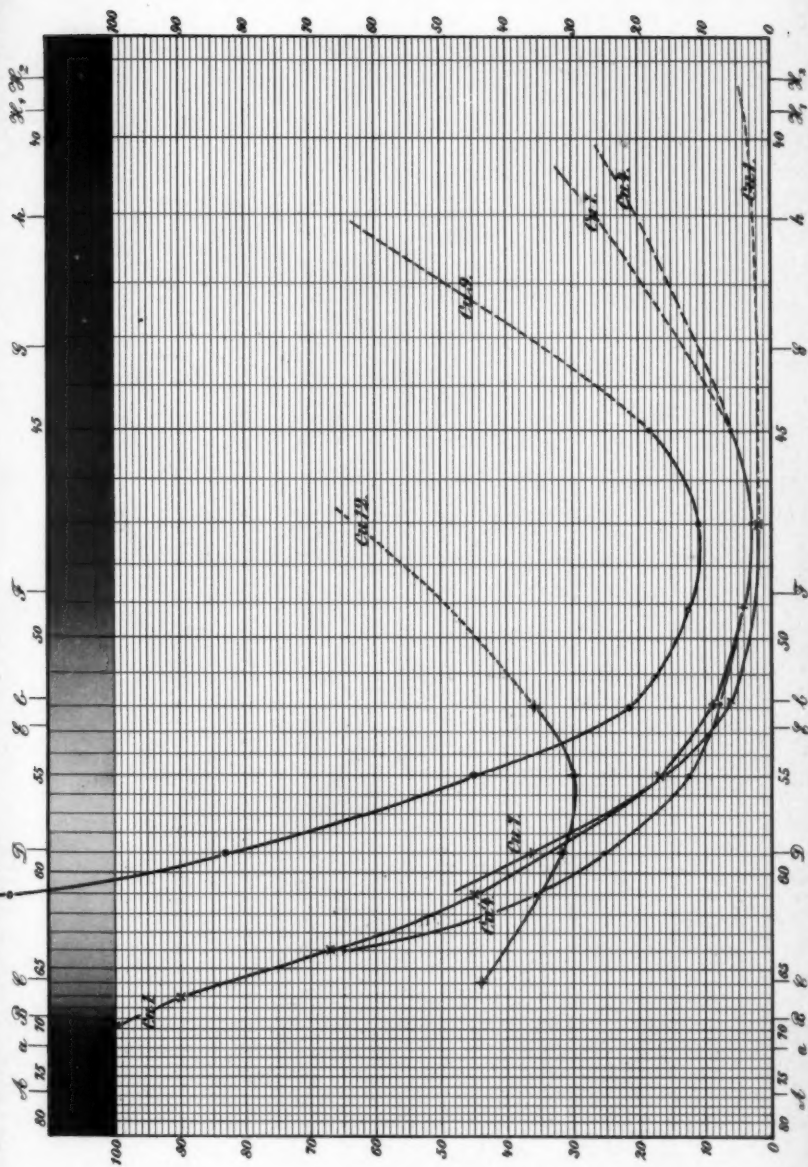




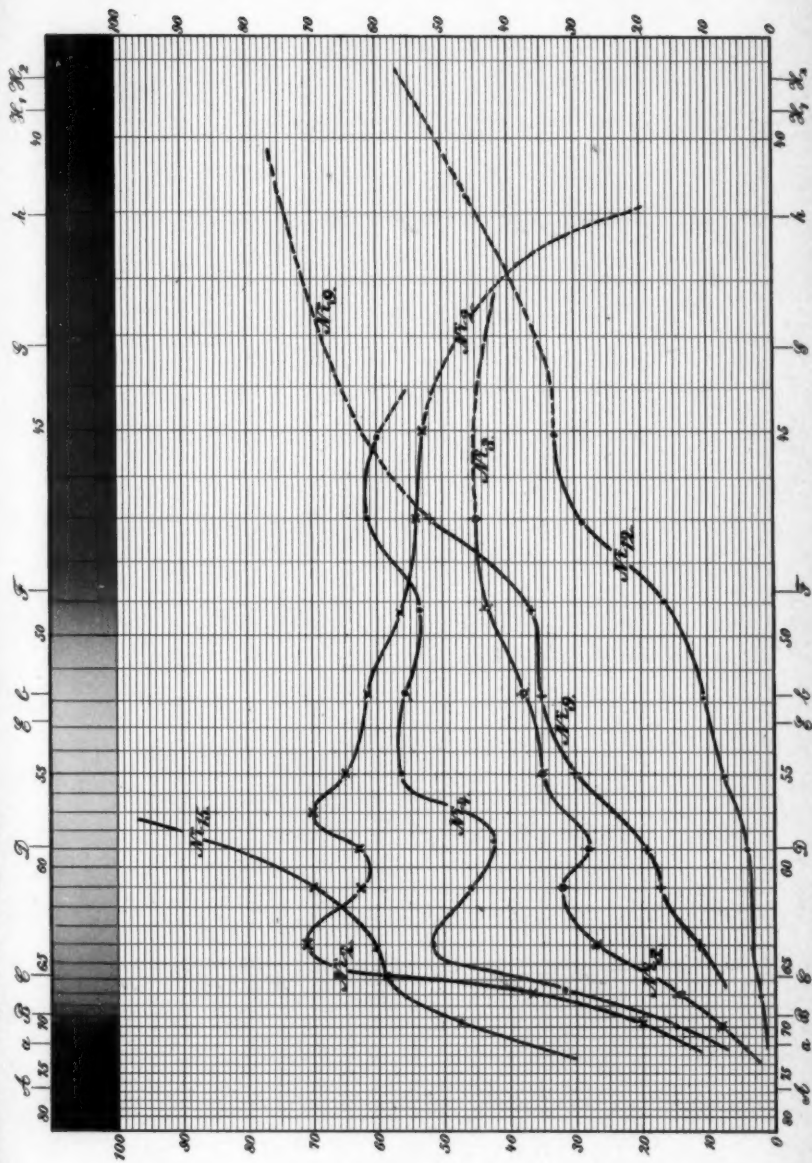
W. König.

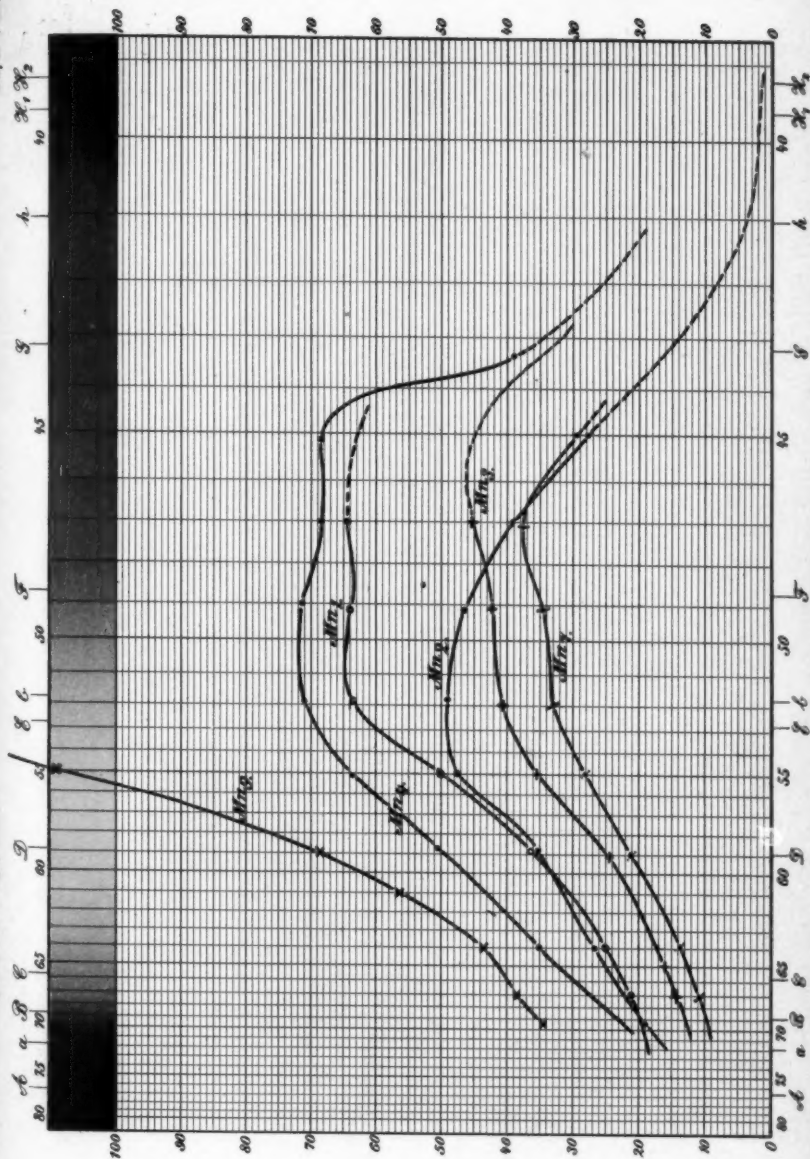


Zsigmondy.

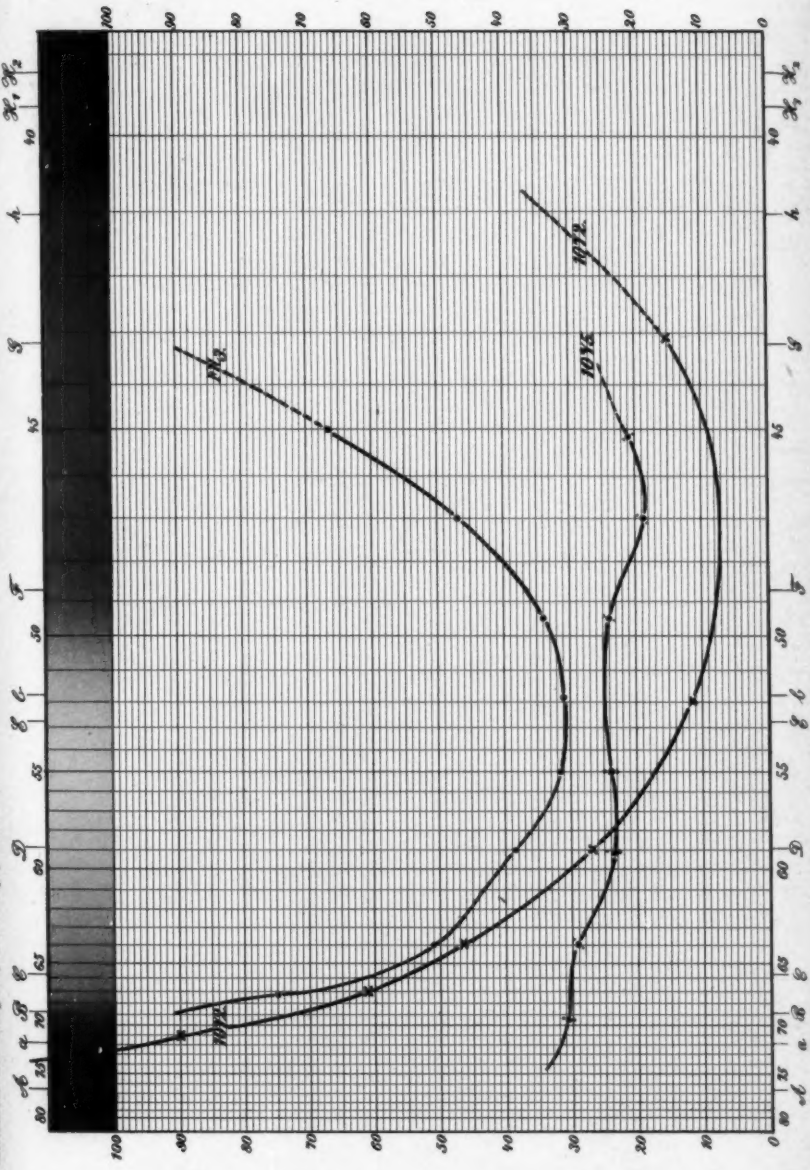


Zsigmondy.





Zsigmondy.



Zsigmondy.



